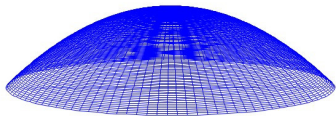


Моделирование колебаний круглой двумерной мембраны

с затуханием и распределением плотности по радиусу

Иванов Александр, 211 группа

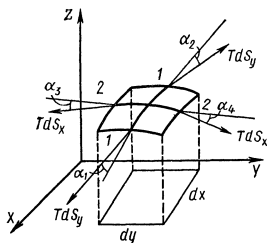


Круглая мембрана



Барабан

Физическая постановка задачи



Элемент поверхности мембраны

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \eta v_z = T \Delta z - \eta v_z \quad (1)$$

В полярных координатах:

$$\rho(r, \varphi) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) - \eta v_z(r, \varphi) \quad (2)$$

Математическая модель: теория

Аппроксимация разностью вперёд:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - U_{x_l, y_m}}{\Delta x},$$

Аналогично можно записать аппроксимацию разностью назад:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_l, y_m} - U_{x_{l-1}, y_m}}{\Delta x}.$$

Двухточечная аппроксимация:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - U_{x_{l-1}, y_m}}{2\Delta x}.$$

Для аппроксимации частной производной второго порядка, аналогичными рассуждениями можно получить следующую формулу:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - 2U_{x_l, y_m} + U_{x_{l-1}, y_m}}{\Delta x^2}.$$

Математическая модель: построение разностной схемы

Преобразуем уравнение (2) с помощью разностных аппроксимаций:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{U_{m+1,l,j} - 2U_{m,l,j} + U_{m-1,l,j}}{\Delta t^2} \right) &= T \left(\frac{U_{m,l+1,j} - 2U_{m,l,j} + U_{m,l-1,j}}{\Delta r^2} \right) + \\ &+ \frac{T}{r} \left(\frac{U_{m,l+1,j} - U_{m,l-1,j}}{2\Delta r} \right) + \frac{T}{r^2} \left(\frac{U_{m,l,j+1} - 2U_{m,l,j} + U_{m,l,j-1}}{\Delta \varphi^2} \right) - \\ &- f \left(\frac{U_{m,l+1,j} - U_{m-1,l,j}}{2\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{m+1,l,j} \left(\frac{\rho}{\tau^2} + \frac{f}{2\tau} \right) &+ U_{m,l,j} \left(-\frac{2\rho}{\tau^2} + \frac{2T}{h^2} + \frac{2T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) + U_{m-1,l,j} \left(\frac{\rho}{\tau^2} - \frac{f}{2\tau} \right) + \\ &+ U_{m,l+1,j} \left(-\frac{T}{h^2} - \frac{T}{2lh^2} \right) + U_{m,l-1,j} \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{2lh^2} \right) + \\ &+ U_{m,l,j+1} \left(-\frac{T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) + U_{m,l,j-1} \left(-\frac{T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

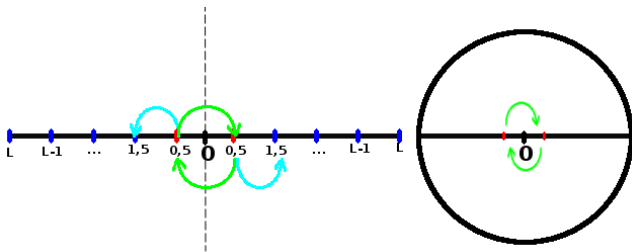
Мембрана закреплена на границе:

$$\forall \varphi \in [0; 2\pi) : U(r, \varphi) \Big|_{r=L} = 0, \Rightarrow U_{m,L,j} = 0.$$

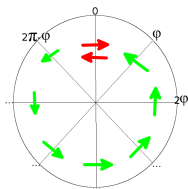
В начальный момент времени мембрана неподвижна:

$$\forall \varphi \in [0; 2\pi), \forall r \in (0; L] : \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

$$0 = \frac{U_{1,l,j} - U_{0,l,j}}{\tau} \Rightarrow U_{1,l,j} = U_{0,l,j}.$$

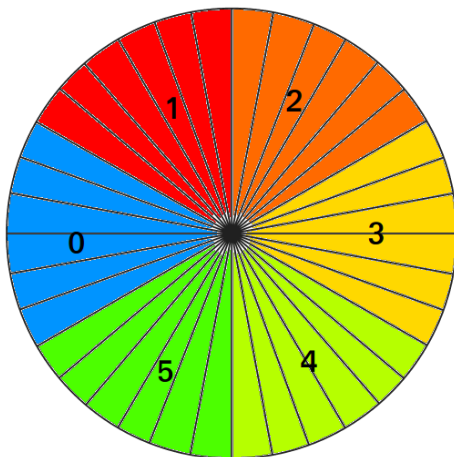


Демонстрация обмена точками в нуле



Демонстрация обмена точками на границах

Параллельный алгоритм



Разделение области обработки между узлами

Параллельный алгоритм: точки вблизи нуля

Интересным и замечательным моментом является то, что при таком разбиении сетки (т.е. на $(L - 1)/2$ частей, учитывая, что индекс i точки сдвигается на 0.5 от центра, мы получаем, что при подстановке индекса 0.5 (индекс ближайшей точки к нулю), коэффициент при члене, отвечающем за диаметрально противоположную точку $-U_{m,l-1,j}$ – равен нулю:

$$U_{m,l-1,j} \times \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{2 \times (0.5) \times h^2} \right) = U_{m,l-1,j} \times \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{h^2} \right) = U_{m,l-1,j} \times 0 = 0.$$

(Title for the video)

(Title for the video)

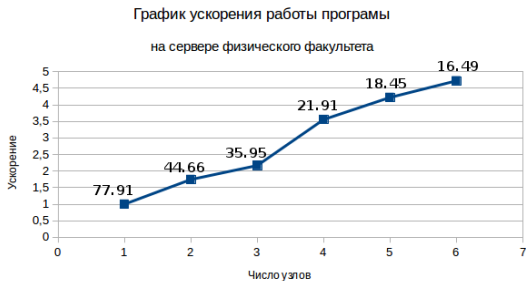


График ускорения работы программы на сервере физ. факультета

График ускорения работы программы

кластере "Ломоносов". Очередь test.

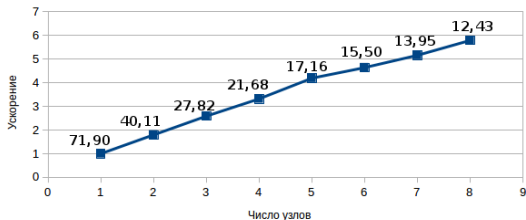


График ускорения работы программы на суперкомпьютере "Ломоносов"

График сравнения ускорений работы программы

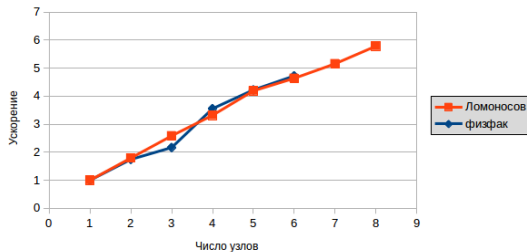


График сравнения ускорений работы программы

В ходе проделанной работы

- 1 Было получено уравнение колебаний круглой мембраны
- 2 Представлена его разностная схема методом аппроксимаций конечными разностям
- 3 Была написана как последовательная, так и параллельная программа, моделирующая колебания круглой мембраны, учитывающая неравномерное распределение плотности по радиусу и позволяющая менять различные параметры оттягивания и смещения мембраны.
- 4 Было реализовано распараллеливание программы и получены данные её ускорений на сервере физического факультета и суперкомпьютере "Ломоносов".

Полученные результаты ускорений говорят о том, что распараллеливание последовательной программы было произведено качественно и что отклонения от линейного возрастания ускорения вызваны наличием последовательных частей кода, необходимых в данной задаче.

- 1 Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968.
- 2 Лепендин Л. Ф. Акустика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978.
- 3 Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука, 1969.
- 4 Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова: Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов" // Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы N 7, 2012. С. 36-39.