

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
"ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ"

Моделирование колебаний неоднородной
двумерной круглой мембраны

Выполнил
Студент второго курса 211 группы
Иванов Александр Владимирович
«16» апреля 2015 г.

Москва, 2015 г.

Аннотация

Целью данной работы является моделирование затухающих колебаний круглой двумерной мембраны, рассматривающее различные случаи неравномерного распределения плотности. Помимо этого было необходимо исследовать возможные пути распараллеливания программы, являющейся решением данной задачи.

Введение

Численные методы – важный раздел математики, который даёт возможность решить сложные или даже нерешаемые аналитически уравнения, путём получения определённых численных характеристик поставленной задачи. Одной из таких систем является круглая мембрана, рассматриваемая в данной курсовой работе. Решением дифференциального уравнения, которым она описывается, является функция, имеющая сложный аналитический вид, что чрезвычайно затрудняет изучение данной модели. Однако, с помощью аппроксимации производных уравнения методом конечных разностей, получается хорошая картина возмущений круглой мембраны, удобная для изучения.

Но для детального изучения полученной модели, необходимо повысить точность расчётов, что довольно-таки сильно отражается на времени, необходимом для нахождения численных решений. Для ускорения работы программы важно использовать оптимизацию программного кода, но не всегда, ограничившись только ею, можно увеличить скорость её выполнения. Действительным способом увеличения скорости работы программы является добавление в неё функции многопоточности.

Существует два основных вида так называемого "распараллеливания" программ. Это использование `openmp` директив и MPI – программного интерфейса для передачи информации, который позволяет обмениваться сообщениями между процессами, выполняющими одну задачу. Именно использованию последнего метода "распараллеливания" и будет посвящена эта курсовая работа.

1 Теория

1.1 Физическая постановка задачи.

Мембраной называют материальную поверхность, не имеющую упругости формы. Хорошим примером мембраны является лист бумаги, натянутый на жёсткий каркас. Для того чтобы натяжение было равномерным, перед монтажом необходимо бумагу слегка увлажнить. После высыхания бумаги получится растянутая во все стороны поверхность, свойства которой очень близки к свойствам идеализированной мембраны.

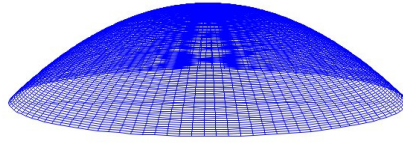


Рис. 1: Круглая мембрана

Для вывода дифференциального уравнения мембраны представим себе немного деформированный элемент поверхности dS (с поверхностной плотностью ρ) со сторонами dS_x и dS_y в состоянии смещения от положения равновесия Рис. 2.

На рисунке обозначим силы натяжения $TdS_x \approx Tdx$, $TdS_y \approx Tdy$. Проекции этих сил натяжения на ось Z состоят из суммы проекций сил, действующих в плоскости, параллельной XOZ . Из геометрических соображений и на основании того, что проекцию каждой силы вычисляют также, как это было бы сделано для струны получим результирующую силу.

На Рис. 2 показаны сечения 1-1 и 2-2. Проекции сил, действующих в сечении 1-1,

$$-Tdy \sin \alpha_1 = dF_1, Tdy \sin \alpha_2 = dF_2,$$

а в сечении 2-2

$$-Tdx \sin \alpha_3 = dF_3, Tdx \sin \alpha_4 = dF_4.$$

В сумме проекций сил dF_1 , dF_2 , dF_3 , dF_4 из-за малости углов синусы можно заменить производными смещений по составляющим координатам.

Таким образом, общая сила упругости натяжения, действующая параллельно Z , имеет значение:

$$\begin{aligned} dF &= Tdy \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_{x+\Delta x}} - \frac{\partial z}{\partial x_x} \right) \right] + Tdx \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y_{y+\Delta y}} - \frac{\partial z}{\partial y_y} \right) \right] = \\ &= Tdy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + Tdx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) Tdxdy \end{aligned} \quad (1)$$

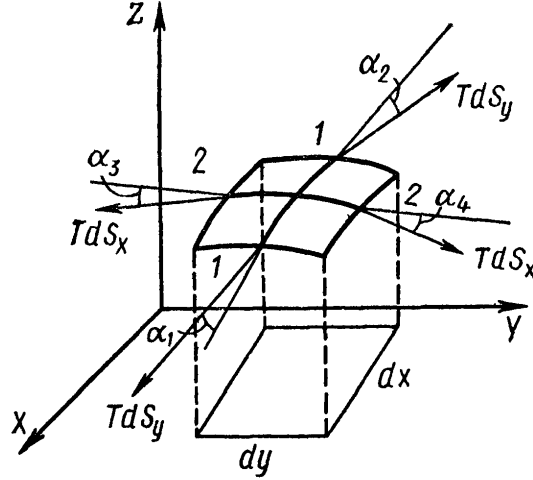


Рис. 2: Элемент поверхности мембраны

По второму закону Ньютона эта сила создаёт ускорение, равное

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{dF}{\rho dx dy} = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

В результате получаем дифференциальное уравнение мембраны в прямоугольной системе координат. Однако, подобного рода задача может быть усложнена путём добавления дополнительных условий.

Будем считать, что мембрана находится в некой вязкой среде. Тогда помимо силы натяжения на неё будет действовать сила вязкого трения, способствующая затуханию колебаний.

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \eta v_z \quad (3)$$

Где η - коэффициент вязкости. Помимо этого будем рассматривать не равномерное распределение плотности, а вообще говоря некую функцию распределения плотности $\rho(x, y)$. В результате конечное дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \eta v_z = T \Delta z - \eta v_z \quad (4)$$

1.2 Математическая модель.

1.2.1 Построение разностной схемы.

Было получено общее уравнение колебаний мембраны, справедливое для любой её формы. Но, поскольку для нас наибольший интерес представляет круглая мембрана, имеет смысл перейти в уравнении (4) к полярной системе координат. Зная выражение оператора Лапласа в полярной системе координат:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2},$$

получаем:

$$\rho(r, \varphi) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) - \eta v_z(r, \varphi) \quad (5)$$

Главной идеей метода конечных разностей является аппроксимация частных производных конечными разностями в некоторых соседних точках.

Используя формулу Тейлора для функции двух переменных, можно записать:

$$U(x_{l+1}, y_m) = U(x_l + \Delta x, y_m) = U(x_l, y_m) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_l + \theta_1 \Delta x, y_m}$$

где $0 \leq \theta_1 \leq 1$, или

$$U_{x_{l+1}, y_m} = U_{x_l, y_m} + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_l + \theta_1 \Delta x, y_m}$$

Отсюда, учитывая, что при малых разбиениях $\Delta x^2 \ll \Delta x$, мы можем пренебречь третьим членом в разложении Тейлора:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - U_{x_l, y_m}}{\Delta x},$$

получив аппроксимация разностью вперёд. Аналогично можно записать аппроксимацию разностью назад:

$$U_{x_{l-1}, y_m} = U_{x_l, y_m} - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_l - \theta_2 \Delta x, y_m},$$

где $0 \leq \theta_1 \leq 1$. Т. е. :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_l, y_m} - U_{x_{l-1}, y_m}}{\Delta x}.$$

Причём точность вышеупомянутых аппроксимаций получается порядка $o(\Delta x)$. Однако, её можно существенно повысить, если сложить первые два разложения в ряд Тейлора в точке (x_l, y_m) , тогда:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - U_{x_{l-1}, y_m}}{2\Delta x}.$$

Получившаяся аппроксимация имеет уже точность $o(\Delta x^2)$, что, безусловно, является более оптимальным вариантом для применения в вычислениях.

Для аппроксимации частной производной второго порядка, аналогичными рассуждениями можно получить следующую формулу:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_l, y_m} = \frac{U_{x_{l+1}, y_m} - 2U_{x_l, y_m} + U_{x_{l-1}, y_m}}{\Delta x^2}.$$

Точность данной аппроксимации, как и предыдущей тоже имеет порядок $o(\Delta x^2)$, поэтому погрешность такого рода аппроксимации будет стремиться к нулю, при существенном увеличении разбиения исследуемого отрезка.

В данной задаче высота мембраны z рассматривается как функция трёх переменных: $z(t, r, \varphi)$. Представив время t , как некую пространственную координату, введём три индекса, привязанных к соответствующим координатам: (t, l, j) . Также для удобства заменим $z \rightarrow U$ (она больше).

Преобразуем уравнение (5) с помощью разностных аппроксимаций:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{U_{m+1, l, j} - 2U_{m, l, j} + U_{m-1, l, j}}{\Delta t^2} \right) = T \left(\frac{U_{m, l+1, j} - 2U_{m, l, j} + U_{m, l-1, j}}{\Delta r^2} \right) + \\ + \frac{T}{r} \left(\frac{U_{m, l+1, j} - U_{m, l-1, j}}{2\Delta r} \right) + \frac{T}{r^2} \left(\frac{U_{m, l, j+1} - 2U_{m, l, j} + U_{m, l, j-1}}{\Delta \varphi^2} \right) - f \left(\frac{U_{m, l+1, j} - U_{m-1, l, j}}{2\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Сделаем некоторые переобозначения. Пусть $\Delta t = \tau$, $\Delta \varphi = \varphi$, $\Delta r = h$. Тогда радиус можно представить как $r = lh$. После соответствующих преобразований получаем:

$$\begin{aligned} U_{m+1, l, j} \left(\frac{\rho}{\tau^2} + \frac{f}{2\tau} \right) + U_{m, l, j} \left(-\frac{2\rho}{\tau^2} + \frac{2T}{h^2} + \frac{2T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) + U_{m-1, l, j} \left(\frac{\rho}{\tau^2} - \frac{f}{2\tau} \right) + \\ + U_{m, l+1, j} \left(-\frac{T}{h^2} - \frac{T}{2lh^2} \right) + U_{m, l-1, j} \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{2lh^2} \right) + \\ + U_{m, l, j+1} \left(-\frac{T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) + U_{m, l, j-1} \left(-\frac{T}{l^2 h^2 \varphi^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Такой вид имеет в конечном счёте полученная разностная схема.

1.2.2 Граничные и начальные условия.

Для решения дифференциального уравнения необходимо знать граничные и/или начальные условия описываемой физической системы. В случае двумерной круглой мембраны, поскольку края мембраны закреплены, выполняется следующее граничное условие:

$$\forall \varphi \in [0; 2\pi) : U(r, \varphi) \Big|_{r=L} = 0, \Rightarrow U_{m,L,j} = 0.$$

Помимо граничных, ещё задаются начальные условия.

Из предположения, что круглую мембрану, рассматриваемую в данной курсовой работе, оттягивают на некоторую высоту и потом отпускают, можно сделать предположение, что в начальный момент времени скорости всех точек мембраны $\dot{U}$ равны нулю. Т.е.:

$$\forall \varphi \in [0; 2\pi), \forall r \in (0; L] : \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Для использования последнего условия воспользуемся аппроксимацией частной производной по времени вперёд, получим:

$$0 = \frac{U_{1,l,j} - U_{0,l,j}}{\tau} \Rightarrow U_{1,l,j} = U_{0,l,j}.$$

Т.е. в следующий момент времени мембрана не меняет своего положения.

2 Программная реализация

2.1 Разбиение области

Мы получили нашу разностную схему, которую впоследствии можно запрограммировать.

$$U_{m+1,l,j} = aU_{m,l,j} + bU_{m-1,l,j} + cU_{m,l+1,j} + dU_{m,l-1,j} + eU_{m,l,j+1} \quad (8)$$

где коэффициенты a, b, c, d, e соответствуют коэффициентам при U из уравнения (7). Таким образом мы находим значение в следующий момент времени как линейную комбинацию значений, лежащих в угловой, радиальной и временной окрестностях.

Одной из основных проблем является задача разбиения поверхности мембраны на конечное число областей. Для разбиения по времени и углу единственным ограничением является устойчивость решения дифференциального уравнения.

В случае разбиения по радиусу выявляется интересная особенность. Важно учесть тот факт, что в нуле (т.е. в центре мембраны, $r = 0$) мы получим неопределённость, так как в уравнении (7) присутствует $\frac{1}{r}$. Чтобы избежать этого, придётся отступить от центра мембраны на некоторое расстояние. Для реализации точечного обмена необходимо, чтобы у рассматриваемой точки был левый и правый сосед. Однако тогда для точек, близких к нулю, точкой-соседом является диаметрально противоположная точка (Рис. 3).

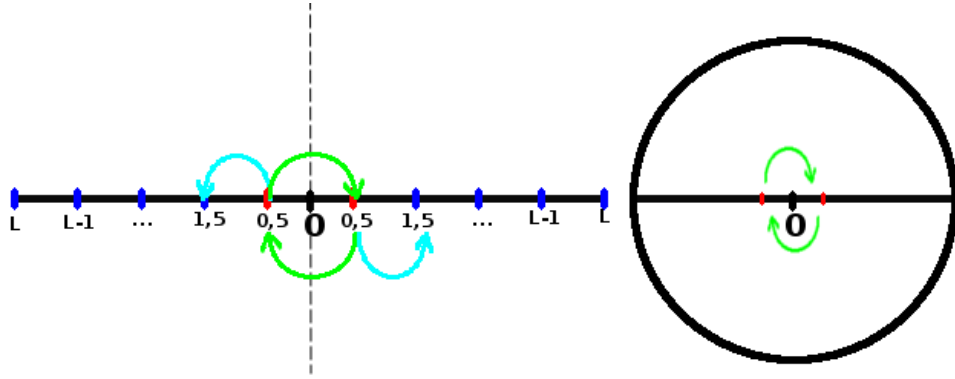


Рис. 3: Демонстрация обмена точками в нуле

Т.е., вообще говоря, рассматривается не разбиение радиуса, а разбиение диаметра. Тогда расстояние от ближайшей точки к нулю до нуля будет равно $0.5h$. Таким образом, получается равномерная сетка с условием деления радиуса на $(L - 1)/2$ частей. Формально их будет L , но та, что ближе к нулю будет равняться половине остальных.

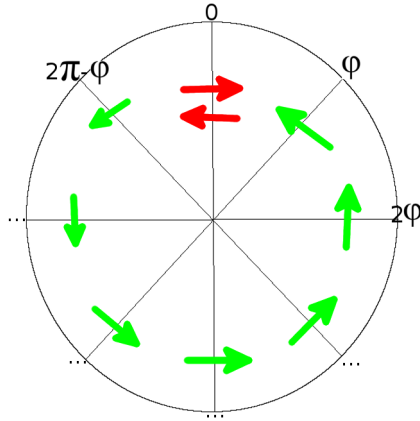


Рис. 4: Демонстрация обмена точками на границах

Помимо этого важно заикливание точечной схемы, путём соседства начальной и конечной границ точечных разбиений по углу (Рис. 4). В остальном же, всё предельно понятно. Как видно из уравнения (8) у каждой неграничной точки должно быть 6 соседей: 2 по углу, 2 по радиусу и 2 по времени.

2.2 Параллельный алгоритм

Для распараллеливания данной задачи используется MPI. Важно понимать, что оптимальный выбор разделений – самая главная часть решения. Ввиду сложности разностной схемы, единственная возможность распределения данных между процессами – это распределение по секторам (Рис. 5).

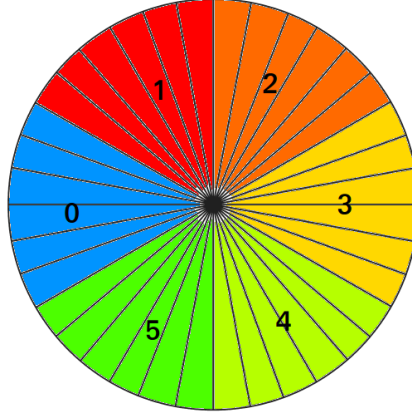


Рис. 5: Разделение области обработки между узлами

Однако в таком случае каждому из процессов необходимы данные процессорных соседей:

1. соседей по углу (например на Рис. 5 процессы 0 и 2 для процесса 1)
2. диаметрально противоположных соседей для точек, близких к нулю
3. собственных значений в предыдущие моменты времени

Интересным и замечательным моментом является то, что при таком разбиении сетки (т.е. на $(L - 1)/2$ частей, учитывая, что индекс i точки сдвигается на 0.5 от центра, мы получаем, что при подстановке индекса 0.5 (индекс ближайшей точки к нулю), коэффициент при члене, отвечающем за диаметрально противоположную точку – $U_{m,l-1,j}$ – равен нулю:

$$U_{m,l-1,j} \times \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{2 \times (0.5) \times h^2} \right) = U_{m,l-1,j} \times \left(-\frac{T}{h^2} + \frac{T}{h^2} \right) = U_{m,l-1,j} \times 0 = 0.$$

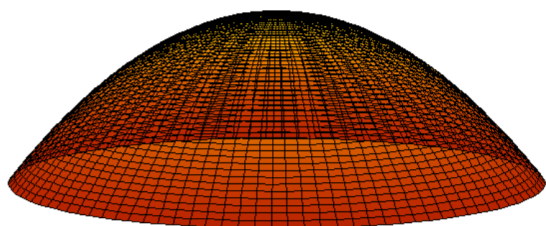
Этот факт совершенно легально освобождает от громоздких и сложных алгоритмов обмена диаметрально противоположными точками и существенно ускоряет время работы программы.

В конечном счёте в программе реализована работа с неравномерным распределением (в случае, если количество секторов не кратно количеству процессов).

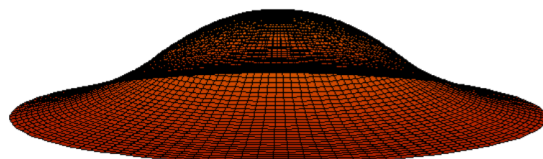
Для обмена данными между соседними секторами по углу использовались специальные буферы, которые пересылались между процессами с помощью функций $MPI_{sendrecv}(\dots)$. После подсчёта всей массы вычислений данные собирались на мастер-процессе (использовались функция $MPI_{gather}(\dots)$) и выводились в файл.

3 Результаты работы

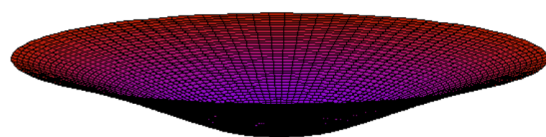
Пример колебания мембраны при центральном вытягивании:



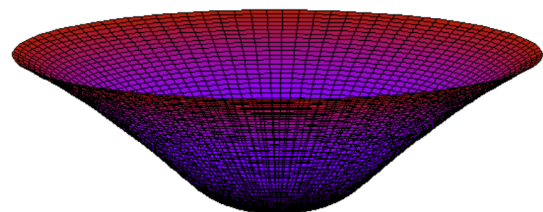
1)



2)

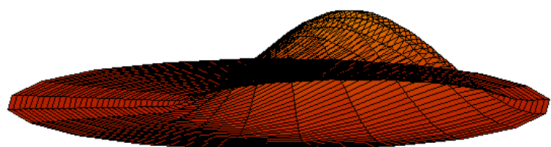


3)

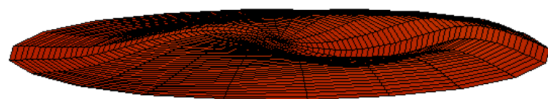


4)

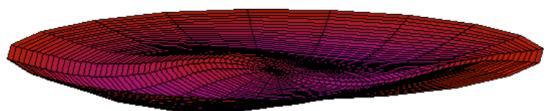
а также случай при вытягивании на расстоянии от центра:



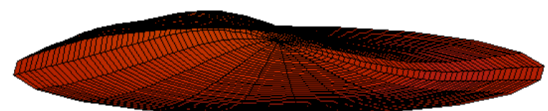
1)



2)



3)



4)

Ниже приведены графики ускорения работы параллельной программы на сервере физического факультета и на суперкомпьютере "Ломоносов". Подписи точек соответствуют времени работы программы на заданном количестве процессов в секундах.

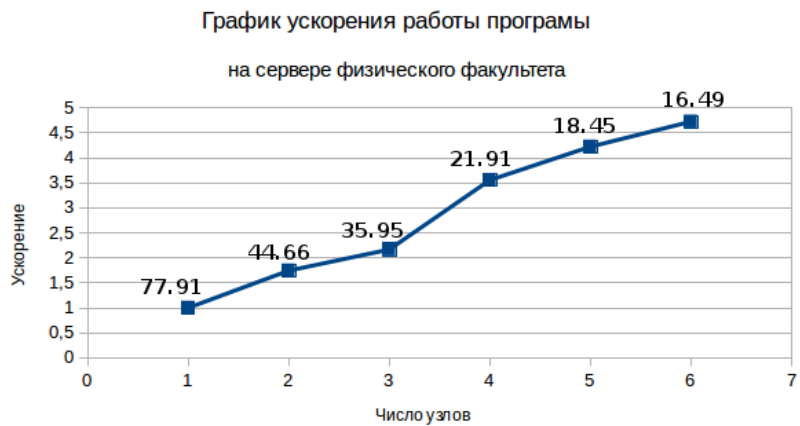


Рис. 6: График ускорения работы программы на сервере физ. факультета

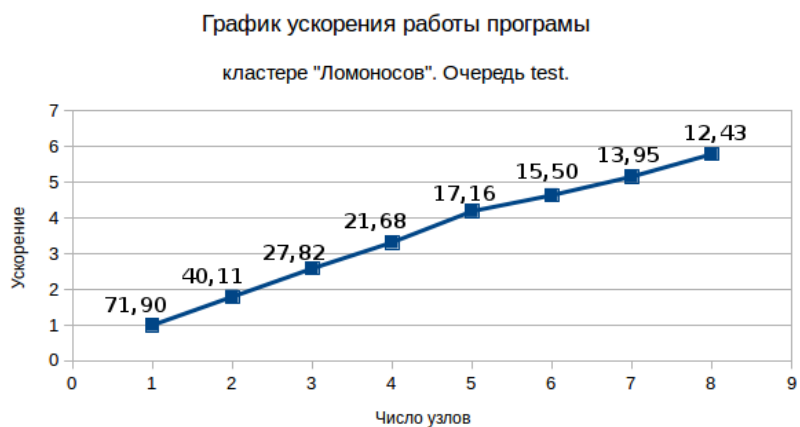


Рис. 7: График ускорения работы программы на суперкомпьютере "Ломоносов"

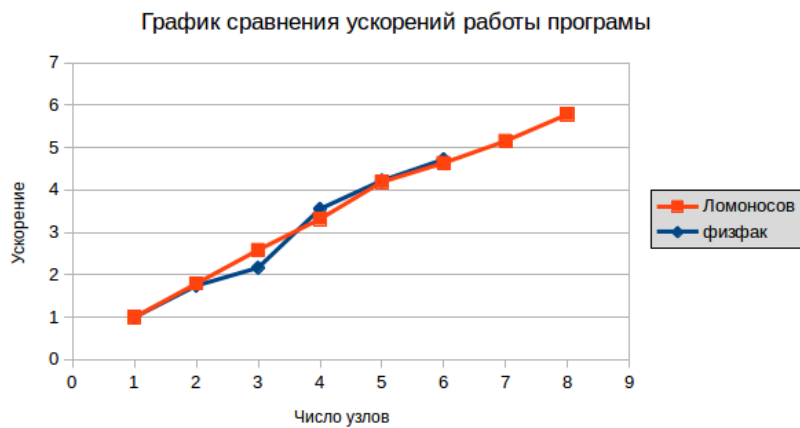


Рис. 8: График сравнения ускорений работы программы

Ускорения работы были получены для 10^5 разбиений по времени и 50 разбиений для угла и радиуса (рисунок оттягивания мембраны на расстоянии от центра). Т.е. в конечном счёте в программе использовалась псевдотрёхмерная матрица размером 25×10^7 , типа **double**.

4 Анализ проделанной работы

В ходе проделанной работы

1. Было получено уравнение колебаний круглой мембраны
2. Представлена его разностная схема методом аппроксимаций конечными разностям
3. Была написана как последовательная, так и параллельная программа, моделирующая колебания круглой мембраны, учитывающая неравномерное распределение плотности по радиусу и позволяющая менять различные параметры оттягивания и смещения мембраны.
4. Было реализовано распараллеливание программы и получены данные её ускорений на сервере физического факультета и суперкомпьютере "Ломоносов".

Полученные результаты ускорений говорят о том, что распараллеливание последовательной программы было произведено качественно и что отклонения от линейного возрастания ускорения вызваны наличием последовательных частей кода, необходимых в данной задаче.

Список литературы

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968.
2. Лепендин Л. Ф. Акустика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука, 1969.
4. Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова: Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов"// Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы N 7, 2012. С. 36-39.