МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Кошелев Ярослав Сергеевич

2 курс, группа 219

Курсовая работа

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЗАМКНУТОЙ СРЕДЕ

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Аннотация 3

2 Введение 4

3 Математическая постановка задачи 4

4 Алгоритмическая постановка задачи 5

4.1 Схема распараллеливания 7

5 Полученные результаты 8

6 Заключение 14

1 Аннотация

Настоящая работа посвящена моделированию распространения звуковых волн в трехмерной закрытой среде с неоднородной геометрией при помощи численного решения волнового уравнения по явной схеме. Написаны последовательный и параллельный коды программы, с помощью которых проводилось исследование. Для параллельной программы измерено ускорение работы на различном числе процессоров. В рамках исследования было изучено распространение звуковых волн в волноводе в виде куба при различных длинах волн, а также огибание волнами препятствий (дифракция). В качестве основных результатов работы получены анимации возмущения среды по времени в различных плоскостях сечения волновода.

2 Введение

Моделирования распространения звуковых волн в различных средах является основной задачей современной акустики. Сегодня область её изучения поистине огромна и разделяется на различные прикладные направления: физическая акустика, геометрическая акустика, архитектурная акустика, строительная акустика и т.д. Звуковые методы исследования применяются в самых различных областях, начиная с медицины и заканчивая музыкальным искусством [1]. Например, акустическая спектроскопия сегодня используется как для обнаружения последствий подземных ядерных испытаний, так и для контроля высококачественных объектов, с помощью ультразвукового исследования с целью локализации микротрещин и прочих незаметных для невооруженного глаза дефектов.

Для решения практически всех задач современной акустики особенно важно понимание законов распространения звуковых возмущений в неоднородной среде, а также возможность их моделирования с хорошей точностью. Решению этой проблемы и посвящена данная курсовая работа.

3 Математическая постановка задачи

Из физических соображений известно [2], что распространение возмущений в среде подчиняется неоднородному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u + f(\vec{r}, t) \tag{1}$$

Здесь u - возмущение среды, v - фазовая скорость распространения волны в среде, $f(\vec{r}, t)$ - функция внешнего воздействия (внешней силы).

В качестве граничных условий для данного уравнения, при распространении волны в замкнутой среде могут быть использованы значения на границах G, в том числе динамические:

$$u(\vec{r},t)|_{(x,y,z)\,\in\,G(t)} = u_0(\vec{r},t). \tag{2}$$

Также с помощью граничных условий в данной работе задавалась геометрия объектов внутри области.

В качестве начальных условий разумно использовать:

$$\begin{cases} u(\vec{r},0) = \phi(\vec{r}) & (3)\\ \dot{u}(\vec{r},0) = \psi(\vec{r}) & (4)\end{cases}$$

В итоге задача моделирования распространения звуковой волны в неоднородной среде сведена к решению задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\Delta u + f(\vec{r},t) & (5)\\ u(\vec{r},t)|_{(x,y,z)\,\in\,G(t)} = u_0(\vec{r},t) & (6)\\ u(\vec{r},0) = \phi(\vec{r}) & (7)\\ \dot{u}(\vec{r},0) = \psi(\vec{r}) & (8)\end{cases}$$

Для большинства систем решение данного уравнения не может быть получено аналитически. Поэтому для нахождения решения прибегают к использованию численных схем.

4 Алгоритмическая постановка задачи

В рамках данной курсовой работы пространство разбивалось на трехмерную сетку, в которой неоднородное волновое уравнение решалось с помощью явной численной схемы. Для дискретизации уравнения (1) воспользуемся центральной разностной схемой второго порядка точности. Используя метод разностной аппроксимации, построим схему «крест» для трехмерного уравнения колебаний [3]. Согласно этому методу, значение первой производной функции $y(x)$ в первом приближении может быть получено как $y'(x) \approx \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$. В терминах значений на сетке получим:

$y'(x) \approx y'(i\Delta x) \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$. Для второй производной разностная аппроксимация дает выражение $y''(i\Delta x) \approx \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta x^2}$. Это значит, что исходное уравнение (1) в первом приближении может быть записано как

$$\frac{u_{i,j,k}^{t+\tau} - 2u_{i,j,k}^{t} + u_{i,j,k}^{t-\tau}}{\tau^2} = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, t) + v^2 \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{t} - 2u_{i,j,k}^{t} + u_{i-1,j,k}^{t}}{\Delta x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{u_{i,j+1,k}^{t} - 2u_{i,j,k}^{t} + u_{i,j-1,k}^{t}}{\Delta y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^{t} - 2u_{i,j,k}^{t} + u_{i,j,k-1}^{t}}{\Delta z^2} \right) \quad (9)$$

Здесь τ - шаг по времени, Δx, Δy и Δz - шаги по координатам. Зная начальные (2) и граничные (3-4) условия, в каждый следующий за текущим момент времени, значения возмущения u в каждой точке сетки может быть найдено как

$$u_{i,j,k}^{t+\tau} = 2\left(1 - c_x - c_y - c_z\right) u_{i,j,k}^{t} - u_{i,j,k}^{t-\tau} + \tau^2 f\left(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, t\right) +$$
$$+ c_x \left(u_{i+1,j,k}^{t} + u_{i-1,j,k}^{t}\right) + c_y \left(u_{i,j+1,k}^{t} + u_{i,j-1,k}^{t}\right) + c_z \left(u_{i,j,k+1}^{t} + u_{i,j,k-1}^{t}\right) \quad (10)$$

Где константы c_x, c_y и c_z равны

$$\begin{cases} c_x = \dfrac{v^2\tau^2}{\Delta x^2} & (11) \\ c_y = \dfrac{v^2\tau^2}{\Delta y^2} & (12) \\ c_z = \dfrac{v^2\tau^2}{\Delta z^2} & (13) \end{cases}$$

На первом шаге все значения $u_{i,j,k}^{0}$ на сетке задаются с помощью начального условия (3) и граничных условий (2). Далее, используя начальное условие (4), с помощью значения производной $\dot{u}(x, y, z, 0) \approx \frac{u_{i,j,k}^{\tau} - u_{i,j,k}^{0}}{\tau^2} \approx \psi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$, получаем значения на сетке в следующий за нулевым момент времени τ: $u_{i,j,k}^{\tau} = u_{i,j,k}^{0} + \tau^2\psi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$. После этого циклически, по формуле (9), вычисляются новые значения возмущения во всех точках сетки. Таким образом, один расчетный цикл соответствует временному шагу τ. Вычисления проводятся для любого заданного временного интервала.

Условие сходимости для такой численной схемы можно записать как [3]:

$$v \cdot \tau < \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{14}$$

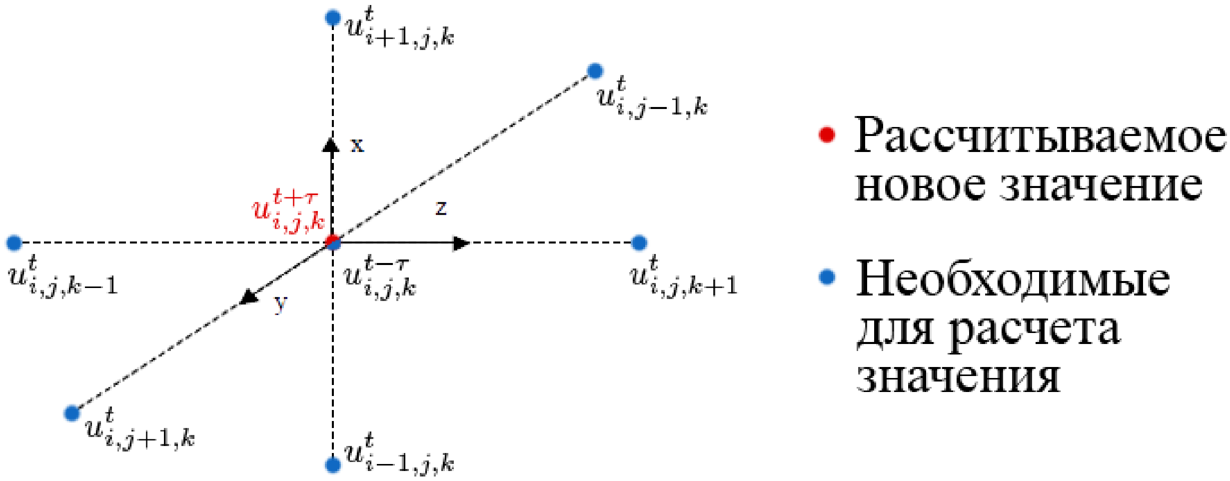

Рис. 1: Схема расчетов.

4.1 Схема распараллеливания

Для реализации описанного в главе 4 явного численного метода в параллельном режиме, расчётная сетка разбивается на N прямоугольных параллелепипедов по одной из осей. Здесь и далее N означает число используемых процессоров. Каждому из них присваивается свой параллелепипед, с которым производятся вычисления по схеме, описанной в главе 4. После каждого расчетного цикла происходит обмен данными между соседними (т.е. работающими со смежными частями общей сетки) процессорами. Значения возмущений в некоторой заданной пользователем плоскости сетки выводится в файл через заданное количество итераций по времени.

Таким образом, разбиение по процессорам происходит как по вычислительным ресурсам, что позволяет ускорить выполнение расчетов, так и по памяти, что, в свою очередь, для больших сеток позволяет обойти ограничения на оперативную память одного узла, делая расчеты возможными. Последнее легко продемонстрировать. Для хранения в памяти сетки $1000 \times 1000 \times 1000$ необходимо порядка ≈ 7.5 Гб памяти. Как можно заметить из (9), в расчетах участвуют 3 таких сетки, т.е. ≈ 22.5 Гб. Подобные расчеты невозможно произвести, например, на одном узле ($N \leq 8$) суперкомпьютера «Ломоносов», поскольку количество оперативной памяти на один узел ограничено 12 Гб [4].

5 Полученные результаты

В качестве первого шага, для сетки $500 \times 500 \times 500$ в виде куба, ограниченного абсолютно упругими стенками, с координатными шагами $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$ м, то есть в области $50 \times 50 \times 50$ м^3 рассчитана и визуализирована дифракция звука на абсолютно упругом кубике размерами $10 \times 10 \times 10$ м^3. Шаг по времени составлял 0.05 с, общее время 100 с, а фазовая скорость распространения звуковой волны была равна $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Здесь и далее скорость в $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ является в своем роде относительной величиной и выбрана для наглядности, поскольку при увеличении скорости и уменьшении временного шага с общим временем в одинаковое количество раз, расчеты никак не изменяются. Монохроматическая волна частотой 0.5 Гц (Рис. 2) возмущалась с приповерхностного слоя области. Так как длина волны в данном случае меньше характерных размеров кубика в 2.5 раза, то его наличие не сильно влияет на распространение волны в среде. Результаты расчетов, а именно визуализация возмущений в различных плоскостях расчетной области представлены на Рис. 5.

На втором шаге в той же области была смоделирована асимметричная система: дифракция на двух кубиках размерами $5 \times 5 \times 5$ м^3 такой же по скорости монохроматической волны, однако длиной $\lambda = 5$ м (Рис. 3), что равно характерному размеру кубиков. Для данной системы дифракция видна гораздо отчетливее. Результаты расчетов представлены на Рис. 6.

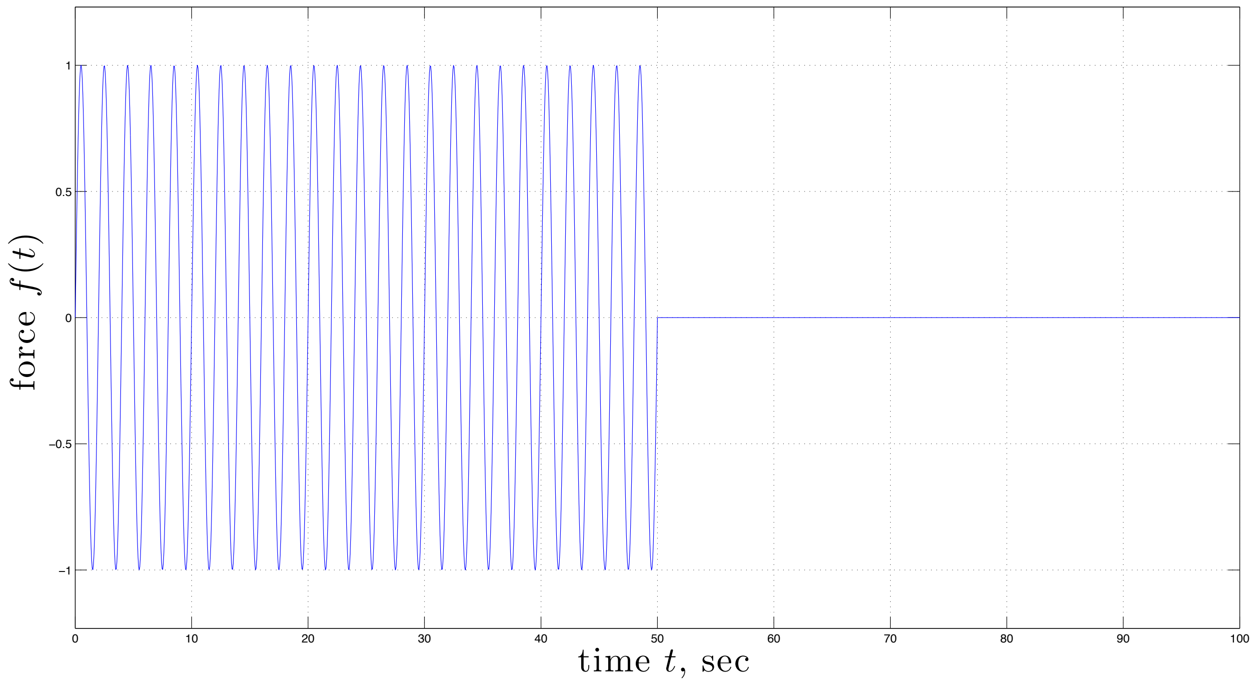

Рис. 2: К дифракции коротких волн на одном кубике. Излучение источника звука в зависимости от времени.

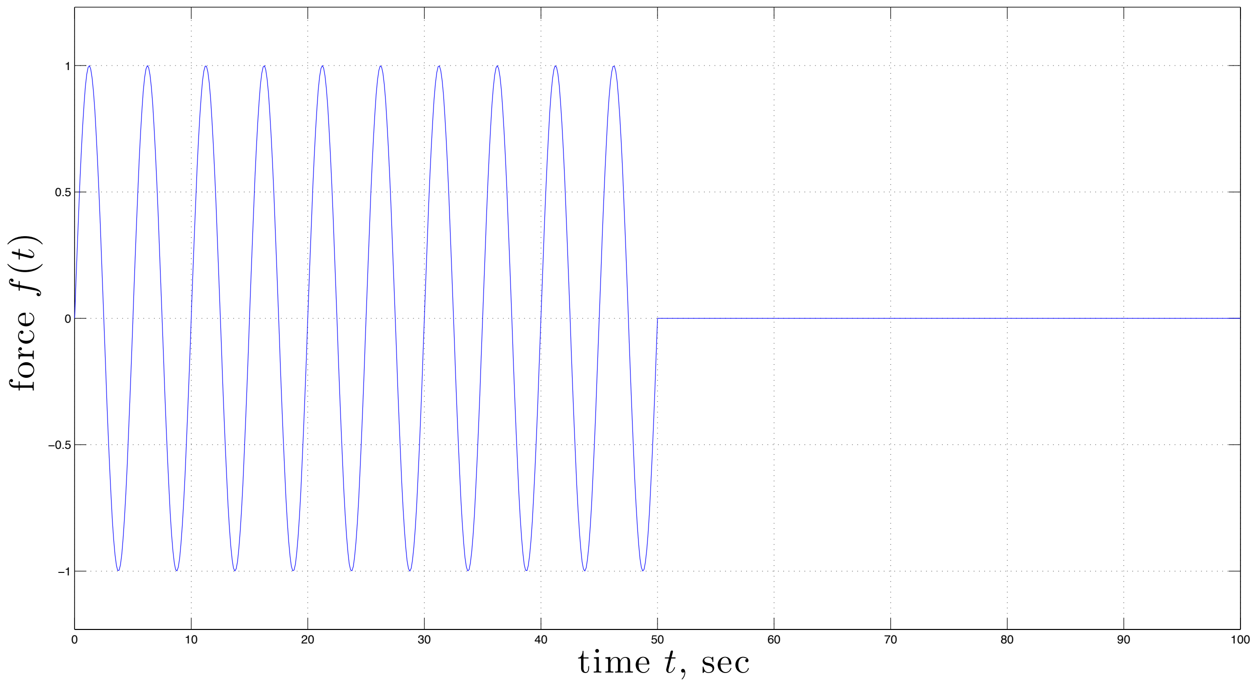

Рис. 3: К дифракции длинных волн на двух кубиках. Излучение источника звука в зависимости от времени.

Последним шагом в абсолютно асимметричной кубической области с прямоугольным параллелепипедом размерами $7.5 \times 7.5 \times 5$ м^3 было смоделировано распространение такой же по параметрам монохроматической волны. Визуализация представлена на Рис. 7.

Для оценки эффективности распараллеливания программы, по расчетам на сетке $200 \times 200 \times 200$ было измерено время выполнения программы на различном количестве процессоров. График ускорения программы от числа процессоров изображен на Рис. 4. При аппроксимации данной зависимости законом Амдала

$$\frac{t_1}{t_N} = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{N}}, \tag{15}$$

было получено, что доля последовательных вычислений в программе составила порядка $\alpha = 1.5\%$.

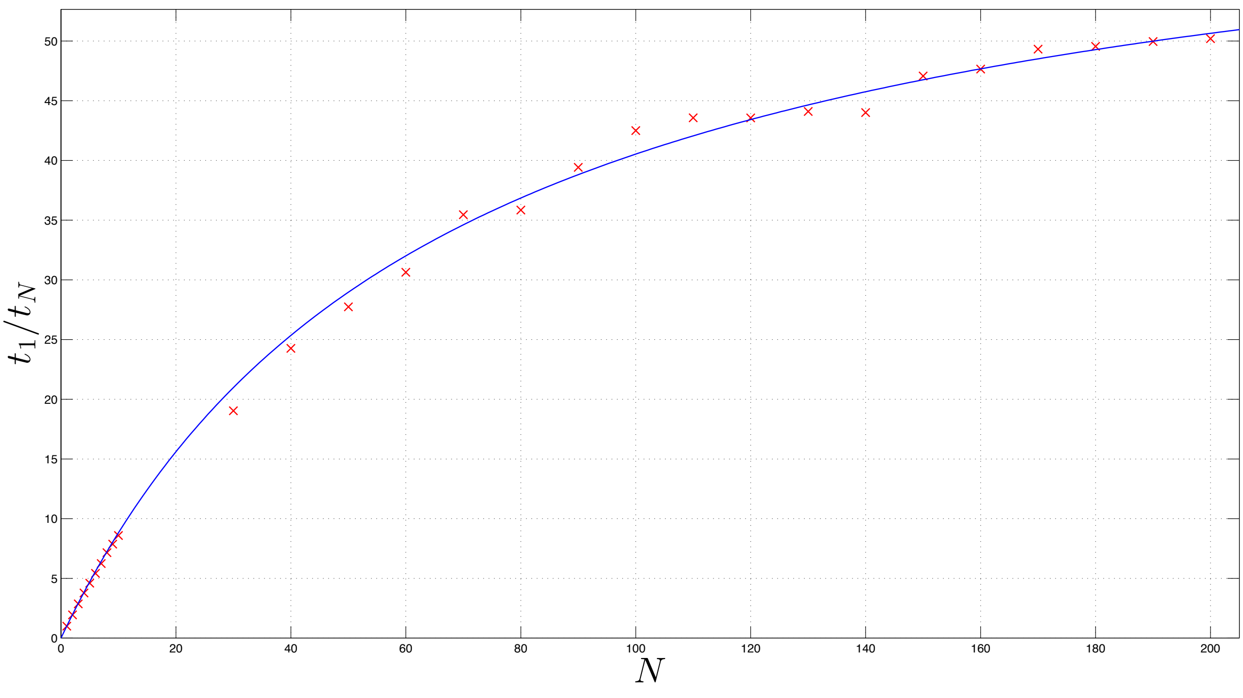

Рис. 4: График зависимости ускорения от количества процессоров, аппроксимированый кривой закона Амдала. Время расчета на одном процессоре ≈ 11.4 мин.

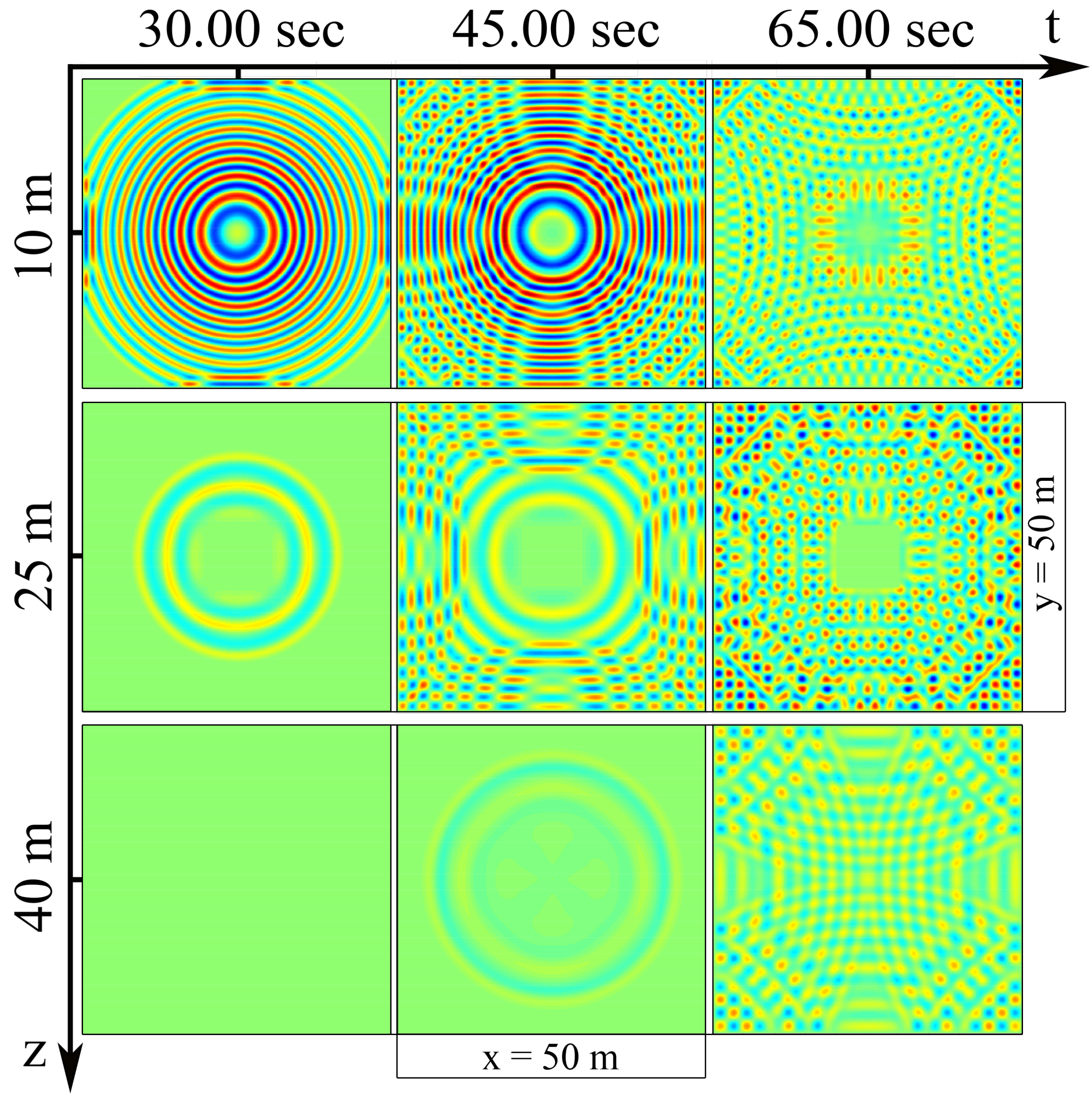

Рис. 5: Дифракция монохроматической звуковой волны частотой 0.5 Гц на кубике $10 \times 10 \times 10\ m^3$, расположенном в центре кубической области $50 \times 50 \times 50\ m^3$. Все стенки системы абсолютно упругие. Время расчетов на 100 процессорах ≈ 9 мин.

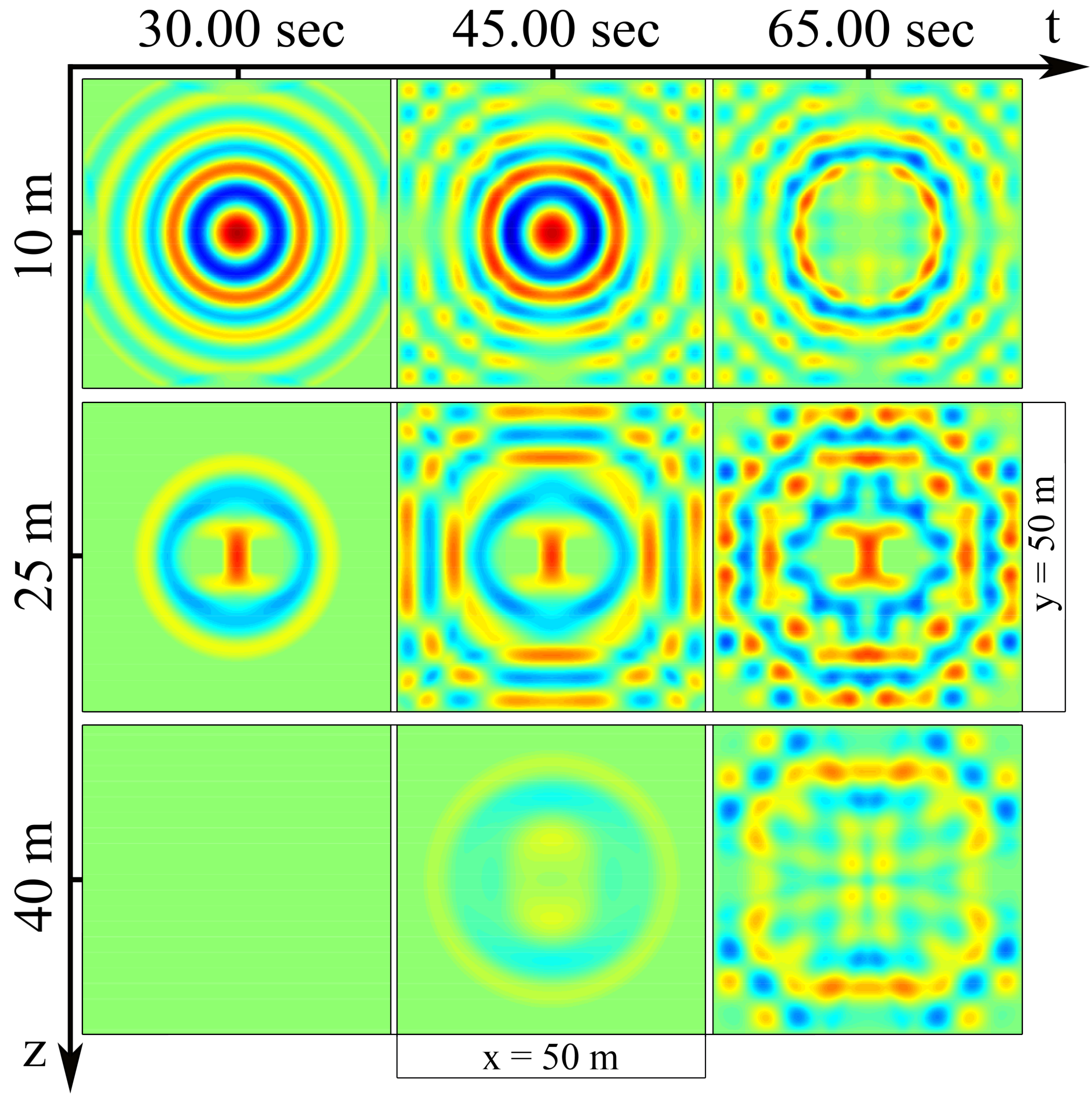

Рис. 6: Дифракция монохроматической звуковой волны частотой 0.2 Гц на системе из двух кубиков размерами $5 \times 5 \times 5\ m^3$, расположенными в центре кубической области $50 \times 50 \times 50\ m^3$. Все стенки системы абсолютно упругие. Время расчетов на 100 процессорах ≈ 9 мин.

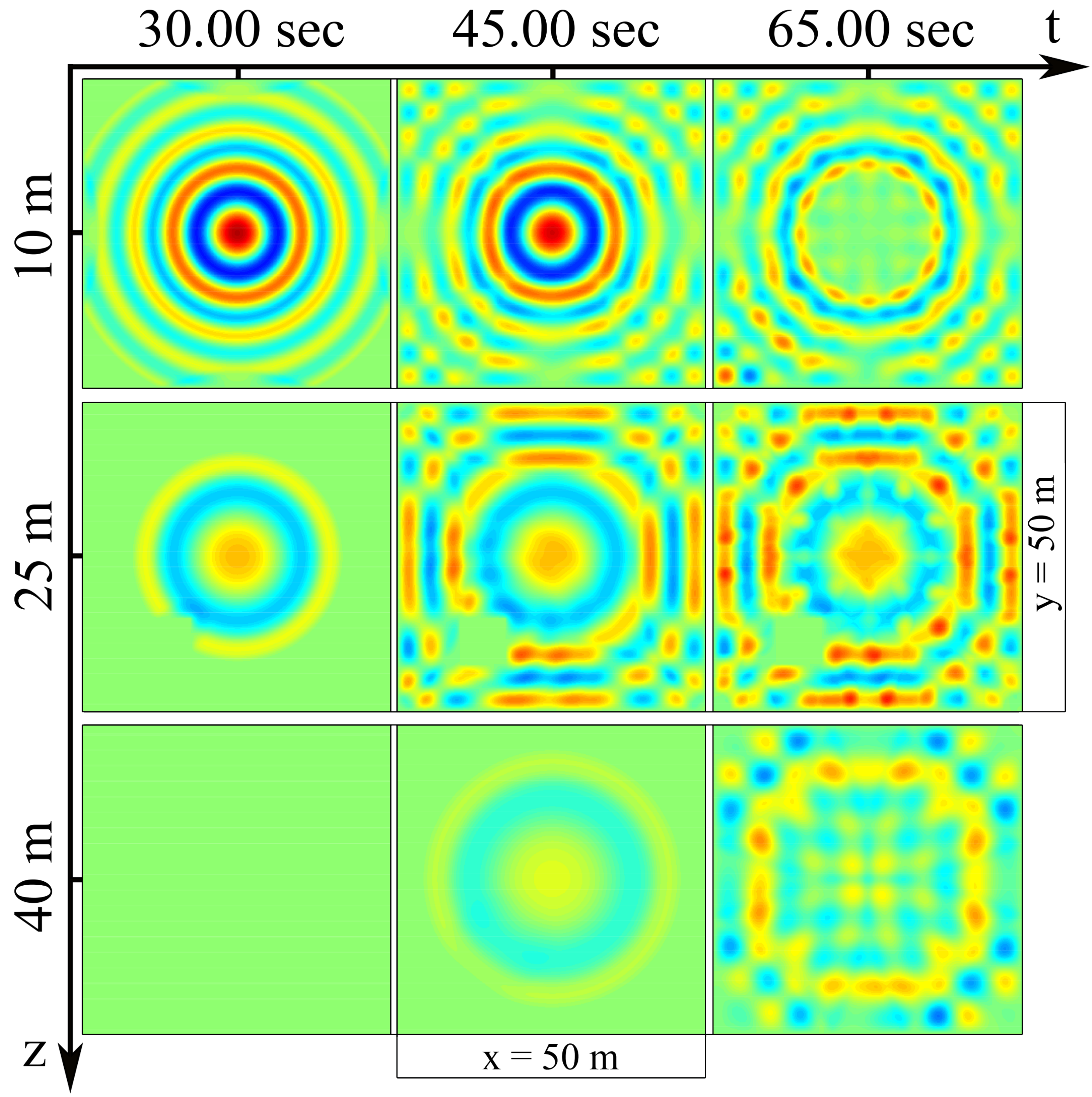

Рис. 7: Дифракция монохроматической звуковой волны частотой 0.2 Гц на параллелипипеде размерами $7.5 \times 7.5 \times 5\ m^3$, расположенном в кубической области $50 \times 50 \times 50\ m^3$. Все стенки системы абсолютно упругие. Время расчетов на 100 процессорах ≈ 9 мин.

6 Заключение

В результате выполнения работы была написана параллельная программа для численного решения неоднородного волнового уравнения по явной схеме. С помощью данной программы было смоделировано распространение звуковых волн в пустой области, дифракция коротких звуковых волн на кубике (Рис. 5), дифракция длинных звуковых волн на системе из двух кубиков (Рис. 6), а также распространение длинных волн в асимметричной кубической области (Рис. 7). В качестве результатов расчетов получены анимации возмущений в различных плоскостях системы. Было измерено ускорение программы при работе на различном количестве процессоров (Рис. 4). Из полученных результатов ускорения можно сделать вывод о том, что применение технологий параллельных вычислений позволяет существенно ускорить расчеты моделирования распространения звуковых волн в различных средах.

Список литературы

[1] В. А. Красильников., *Акустика.* БСЭ. - 3-е изд. М.. 1974. - Т. 1.

[2] Тихонов А.Н. и Самарский А.А., *Уравнения математической физики: Учебное пособие.* 6-е изд., испр. и доп - Москва.: Издательство МГУ (1999) 798 с.

[3] Самарский А.А., *Введение в теорию разностных схем.* Москва.: Издательство «Наука» (1971) 552 с.

[4] *Конфигурация суперкомпьютеров*, http://users.parallel.ru/wiki/pages/22-config

[5] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С. и Воеводин Вад.В., *Практика суперкомпьютера "Ломоносов".* Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы № 7, 2012. С. 36-39.