

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Курсовая работа по дисциплине
"Параллельное программирование"

Распространение тепла в радиаторе

Выполнил
студент 2 курса группы 202
Ф.И.О.

_____ 2015

Научный руководитель
Ф.И.О.

_____ 2015

Москва, 2015 г.

Аннотация

В данной работе был рассчитан процесс нагревания радиатора при условии постоянного отвода от него воздуха. Задача состояла в нахождении распределения температуры в радиаторе через заданное время после начала нагревания. Решение основано на двух физических законах - Фурье и Ньютона-Рихмана и осуществлено с помощью метода конечных разностей. Программа, реализующая поиск решения, написана с использованием MPI. Целью работы было получить ускорение с помощью данного интерфейса. Максимальное полученное ускорение приблизительно равно 19.

Содержание

Введение	4
Теория	4
Постановка задачи.	4
Аппроксимация.	5
Устойчивость.	7
Структура программы.	7
Результаты	8
Распределение температуры в радиаторе в зависи- мости от времени.	8
Ускорение.	10
Вывод	11
Литература	12

Введение

Задачи теплопроводности, возникающие в инженерной практике, редко решаются аналитически. А если решаются, то зачастую такие решения оказываются неэффективными. Причиной может быть сложная геометрия реальных объектов, отличных по форме от простых пластин, цилиндров или сфер, с которыми имеют дело в аналитическом курсе теории теплопроводности, или нелинейность математических моделей, из-за сильной температурной зависимости физических свойств, коэффициентов в граничных условиях. Универсальным способом решения являются численные методы, требующие компьютерной реализации. Но используемые для этого явные конечно-разностные схемы обладают существенным ограничением на шаг по времени, который зависит от размеров сетки. Таким образом, для большой точности вычислений необходимы огромные объемы вычислений. MPI позволяет успешно решать такие задачи, так как для решения задач теплопроводности на каждом этапе нет зависимости по данным между процессами. Это означает, что ускорение такой программы будет зависеть только от скорости передачи данных между процессами и времени ожидания отстающих процессов после каждого прохождения по сетке.

Теория

Постановка задачи. Задача представляет собой численное решение нестационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial t} - a\Delta u(x, y, z) = 0$$

С граничными условиями первого рода на нижней грани

$$u(x, y, 0) = u_1$$

И третьего рода на оставшейся поверхности радиатора

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial n} = k(T_{out} - T_{in})$$

В данном случае рассматриваемая область имеет простую геометрическую форму, и нет необходимости в методе конечных элементов. Так как метод конечных разностей проще реализуем, то воспользуемся именно им.

Покроем область неравномерной прямоугольной сеткой, направив оси

сетки вдоль ребер радиатора так, чтобы на каждую его грань приходились узлы сетки. Запишем разностное представление этого уравнения

$$u_{i,j,k}^{k+1} = u_{i,j,k}^k + \Delta t a \left(\frac{u_{i+1,j,k}^k - 2u_{i,j,k}^k + u_{i-1,j,k}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^k - 2u_{i,j,k}^k + u_{i,j-1,k}^k}{\Delta y^2} + \frac{u_{i,j,k+1}^k - 2u_{i,j,k}^k + u_{i,j,k-1}^k}{\Delta z^2} \right)$$

См. [4] л.5

Так как при решении поставленной задачи использовалась неравномерная сетка, то разностное уравнение было составлено следующим образом

$$u_{i,j,k}^{k+1} = u_{i,j,k}^k + \Delta t (a_i \frac{u_{i+1,j,k}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta x_1 \Delta x} + a_i \frac{u_{i-1,j,k}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta x_2 \Delta x} + a_i \frac{u_{i,j+1,k}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta y_1 \Delta y} + a_i \frac{u_{i,j-1,k}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta y_2 \Delta y} + a_i \frac{u_{i,j,k+1}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta z_1 \Delta z} + a_i \frac{u_{i,j,k-1}^k - u_{i,j,k}^k}{\Delta z_2 \Delta z}),$$

где

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}, \quad \Delta y = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{2}, \quad \Delta z = \frac{\Delta z_1 + \Delta z_2}{2},$$

а a_i в каждом случае принимает либо значение коэффициента теплопроводности меди для обеих точек, лежащих внутри металла, либо приведенного коэффициента теплоотдачи для точек, одна из которых лежит на поверхности металла, а другая в воздухе.

Аппроксимация. В связи с тем, что при рассмотрении вопросов аппроксимации и устойчивости для трехмерной задачи необходимы довольно громоздкие выкладки, рассмотрим аналогичную одномерную задачу на равномерной сетке.

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \tau a \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} \right) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T$$

с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ и с двумя граничными условиями первого рода $u(0, t) = \psi_0(t)$, $u(1, t) = \psi_1(t)$

Решение данной задачи для любых начальных и граничных условий единственно.

Для того, чтобы решить вопрос об аппроксимации, рассмотрим проекцию $\tilde{u}$ точного решения на сетку. Эта функция непрерывная, непрерывно дифференцируемая, и мы можем раскладывать ее в ряд Тейлора.

Необходимо разложить эту проекцию в ряд в любой точке шаблона. Результат от точки шаблона зависеть не будет. Выберем точку, требующую наименьшего количества членов в разложении в ряд. Это точка $u_{i,k}$.

$$\tilde{u}_i^{k+1} = \tilde{u}_i^k + \tau \tilde{u}_t + \frac{\tau^2}{2} \tilde{u}_{tt} + \frac{\tau^3}{6} \tilde{u}_{ttt} + \dots$$

$$\tilde{u}_{i+1}^k = \tilde{u}_i^k + h \tilde{u}_x + \frac{h^2}{2} \tilde{u}_{xx} + \frac{h^3}{6} \tilde{u}_{xxx} + \frac{h^4}{24} \tilde{u}_{xxxx} + \dots$$

$$\tilde{u}_{i+1}^k = \tilde{u}_i^k - h \tilde{u}_x + \frac{h^2}{2} \tilde{u}_{xx} - \frac{h^3}{6} \tilde{u}_{xxx} + \frac{h^4}{24} \tilde{u}_{xxxx} + \dots$$

Подставляем в разностную формулу и приводим подобные члены

$$\tilde{u}_t + \frac{\tau}{2} \tilde{u}_{tt} + \frac{\tau^2}{6} \tilde{u}_{ttt} = a \tilde{u}_{xx} + a \frac{h^2}{12} \tilde{u}_{xxxx}$$

За счет выполнения уравнения теплопроводности

$$\frac{\tau}{2} \tilde{u}_{tt} + \frac{\tau^2}{6} \tilde{u}_{ttt} = a \frac{h^2}{12} \tilde{u}_{xxxx}$$

Таким образом, мы получили главный член погрешности невязки. Если решение обладает ограниченной второй производной по времени и ограниченной четвертой производной по пространству, то явная разностная схема аппроксимирует данное уравнение с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$ (См. [4] л.5).

Проводя аналогичные преобразования для неравномерной сетки (см [5] л.2) с разностной аппроксимацией в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_1} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_2} \right),$$

где $h = (h_1 + h_2)/2$, можно получить

$$\frac{\tau}{2} \tilde{u}_{tt} + \frac{\tau^2}{6} \tilde{u}_{ttt} = a \left(\tilde{u}_{xx} \left(\frac{h_1 - h_2}{3} \right) \right).$$

Таким образом на нерегулярном шаблоне при $h_1 \gg h_2$ аппроксимация имеет первый порядок. Следовательно, резкое различие соседних элементов нежелательно.

Устойчивость. Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости данной схемы. Для этого воспользуемся спектральным признаком устойчивости. Заменим краевую задачу задачей Коши, функцию $\varphi(x)$ – гармоникой $e^{i\omega t}$ и будем искать решение в виде

$$u_i^k = \lambda k e^{i\omega t}$$

, где ω – произвольное число, $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы спектр $\lambda = \lambda(\omega)$ лежал в круге $|\lambda| \leq 1 + c\tau$, где c не зависит от t . Подставляя $u_m^k = \lambda k e^{i\omega t}$ в рассмотренное разностное уравнение, получим

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a \frac{e^{-i\omega t} - 2 + e^{i\omega t}}{h^2} = 0$$

или

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau a}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

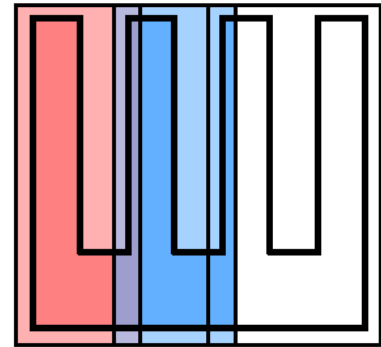
Разностная схема устойчива, если выполнено неравенство $|\lambda| \leq 1$, т.е. когда τ, h выбраны так, что

$$\frac{\tau a}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Для трехмерной задачи условие устойчивости будет выглядеть так:

$$\tau a \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Структура программы. Программа, реализующая решение данной задачи, была написана с использованием MPI. Область решения разбивалась между процессами так, чтобы на каждый процесс приходилось целое число элементов радиатора. Для каждого процесса определялся правый и левый процессы. После каждого прохода по сетке, соседние процессы обменивались граничными условиями.



При запуске программы задавались параметры радиатора, сетки и время, через которое необходимо узнать распределение температуры в радиаторе. Из условия устойчивости разностной схемы рассчитывался шаг по времени. Таким образом цикл прекращался, когда количество итераций становилось равно заданному времени, делённому на шаг по времени. После чего полученные данные передавались нулевому процессу, и тот выводил их в файл.

Результаты

Распределение температуры в радиаторе в зависимости от времени. Оценим достоверность полученных результатов. Для этого рассчитаем, какой должна быть температура на расстоянии 1см от нагревателя через одну секунду после начала нагрева в плоском металлическом слое. Сравнение будет проводиться для радиатора, содержащего только из одно ребро, то есть радиатор - цельный медный куб. Ребро куба 10см . Такая конфигурация радиатора наилучшим образом соответствует поставленной теоретической задаче.

Рассмотрим задачу о нестационарном процессе теплопроводности в плоском слое, толщина которого вдоль оси z равна d , а размеры по осям x и y не ограничены. В момент времени $t = 0$ температура слоя во всех точках была равна $T_0 = 300\text{K}$. К плоскости $z = d$ присоединяется нагреватель $T_1 = 350\text{K}$, к плоскости $z = 0$ - холодильник $T_0 = 300\text{K}$.

Решение задачи о нахождении температуры в плоскости $z = z_0$ через промежуток времени $t = \tau$ после начала нагрева, представляет собой бесконечный ряд(см [1]):

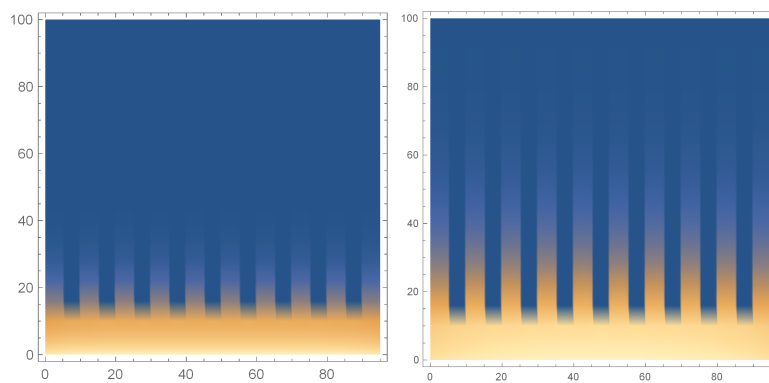
$$T(z_0, \tau) = T_0 + (T_1 - T_0) \left[\frac{z_0}{d} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp \left(- \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 a \tau \right) \sin \frac{\pi n z_0}{d} \right]$$

где a - коэффициент температуропроводности меди. Он медленно уменьшается с температурой, и можно считать его константой.

В данном случае толщина слоя $d = 10\text{м}$, а расстояние от холодильника до рассматриваемой точки $z = 9\text{см}$. Оценим значение температуры $T(9\text{см}, 1\text{сек})$. Легко заметить, что с номером члены ряда стремятся по модулю к нулю. Первый член ряда приблизительно равен -0.276952 . При суммировании первых ста членов, получаем -0.624987 . При суммировании первых ста тысяч членов, получаем величину того же порядка -0.624987 . Таким образом, температура на 1см от нагревателя приблизительно равна $325,1\text{K}$. Расчитанная же температура приблизительно равна $314,730\text{K}$.

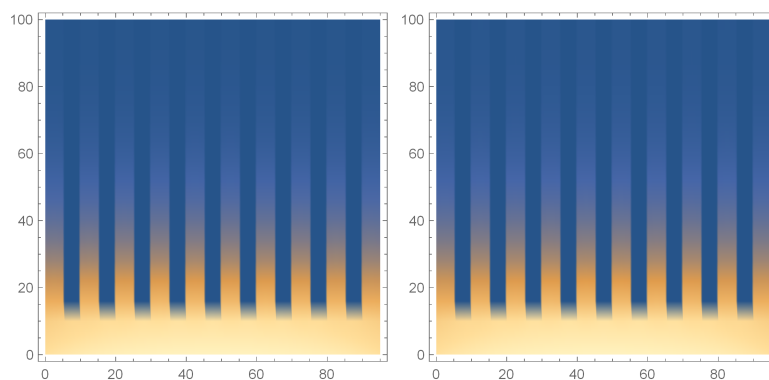
Надо заметить, что полученная температура в данной точке меняется незначительно(от 314.0 до 314.9) при изменении параметров радиатора(числа ребер, толщины ребер) и сильно(от 300.1 до 315.0) меняется при изменении коэффициента теплоотдачи, который меняется в пределах от 10 до $100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$.

Десять граней.



1сек.

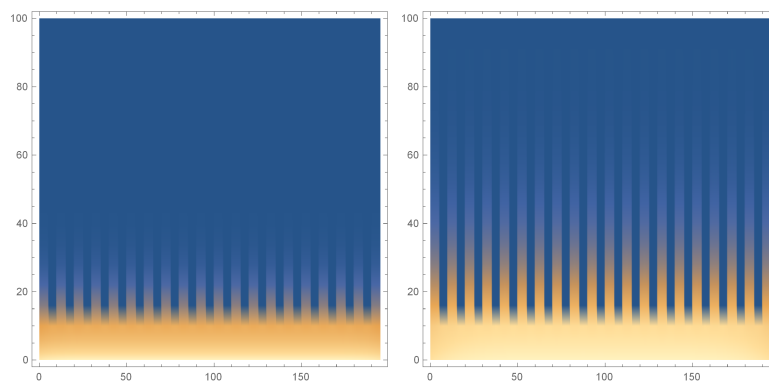
5сек.



10сек.

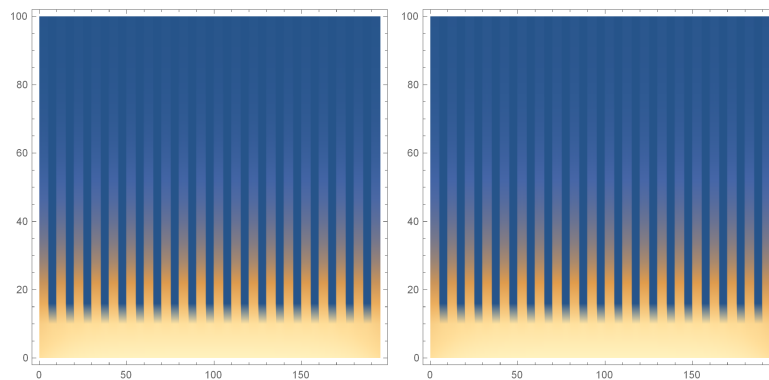
20сек.

Двадцать граней.



1сек.

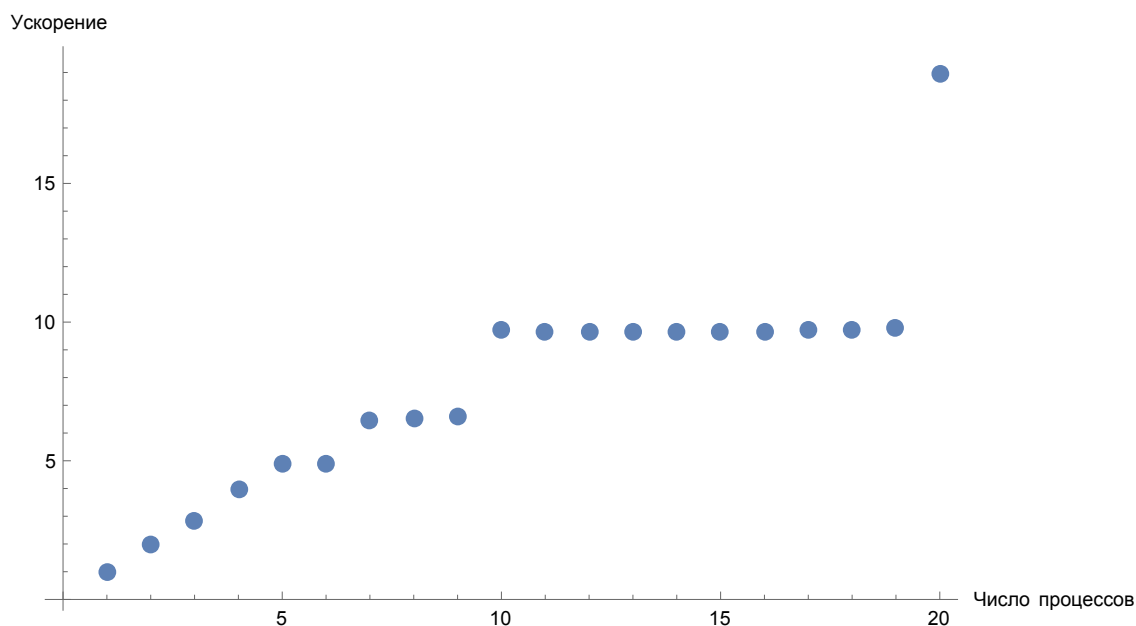
5сек.



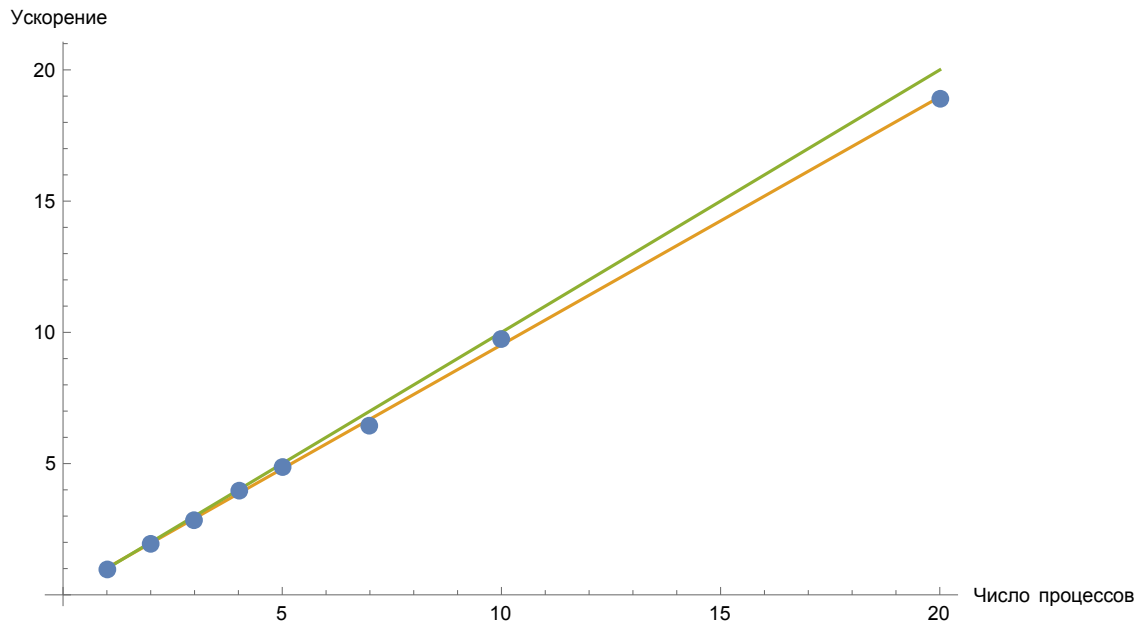
10сек.

20сек.

Ускорение. В ходе выполнения данной работы была получена зависимость ускорения от числа процессов. Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [2]. Так как на каждый процесс приходится целое число периодов решетки, то рассматривать количество процессов большее, чем число ребер радиатора, не имеет смысла. Ниже приведен график данной зависимости для решетки размера 160000 узлов, которая проходила 8880 раз.



Вид зависимости также объясняется тем, что на каждый процесс приходится целое число периодов решетки. Если количество процессов таково, что на каждый приходится небольшое количество периодов радиатора, то добавив один процесс, мы добьемся лишь того, что он будет простаивать, ожидая остальных. Если же на каждый процесс приходится достаточно большое количество периодов, то при добавлении процесса количество периодов разделится между процессами более менее равномерно, и мы получим ускорение. Таким образом, скачки соответствуют ситуации, когда количество ребер радиатора разделено поровну между процессами (или почти поровну). В данном случае расчет проводился для 20 процессов. Можно видеть, что разрывы находятся при расчете на 5, 7, 10 и 20 узлах, что соответствует делению рассчитываемой области по 4, 3, 2 и 1 периода радиатора на процесс соответственно. Поэтому далее точки, образующие плато, не рассматриваются. Ниже представлен график для сравнения теоретического и экспериментального ускорений.



Эффективность параллельного алгоритма равна 0,9446.

Оценим доли последовательной и параллельной частей программы, используя закон Амдала(см. [3] л.3).

$$S_n = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{n}}$$

где α - доля последовательной части программы.

Максимальное ускорение равное 18.928 достигается на двадцати процессах. Получаем, что доля последовательной части программы равна приблизительно 0.003. Тогда для параллельной части доля 0.997.

Вывод

В ходе выполнения работы была написана параллельная программа с помощью MPI. Удалось достигнуть хорошего результата. Ускорение для максимально возможного числа процессов почти достигает девятнадцати, а эффективность параллельного алгоритма равна 0.9446. К недостаткам программы можно отнести то, что программа ускоряется, только если число ребер радиатора делится нацело на количество процессов.

Список литературы

- [1] Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика(Общий курс физики т.2).-М.:Наука,1990. §52-54.
- [2] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов">// Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы N 7, 2012. С. 36-39.
- [3] Милицин В.О., Янышев Д.Н., Буткарев И.А. Лекции "Параллельное программирование для решения ресурсоемких задач физики"МГУ 2014-2015.
- [4] Лобанов А.И. Лекции "Численные методы решения уравнений в частных производных"МФТИ 2013.
- [5] Мулярчик С.Г. Лекции "Методы вычислительного эксперимента."БГУ 2003.