

1 Постановка задачи

Необходимо исследовать расхождение пучка монохроматического лазера в пылевом облаке с, электромагнитно непроницаемыми, малоподвижными пылинками одинакового размера. Для реализации задачи применить Фурье-оптику, как можно больше распараллелить вычислительную часть программы, по возможности воспользоваться сторонними библиотеками.

2 Использование понятий Фурье-оптики для изучения распределения света

Идеи и методы, связанные с направленным воздействием на световые поля с целью формирования заданной структуры поля, объединяют понятием "фурье-оптика". Тем самым подчёркивается основополагающая роль спектральных представлений для решения задач, связанных с анализом, преобразованием и синтезом световых полей.

Спектральное разложение, основанное на преобразовании Фурье, позволяет представить произвольное световое поле со сложной пространственно-временной структурой в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. В силу линейности волнового уравнения, каждая из этих волн распространяется в вакууме или в линейной оптической среде независимо от других волн, что дает возможность свести анализ преобразования сложного поля к задаче о преобразовании элементарной волны. Результирующее поле находят затем путем суммирования прошедших через систему плоских монохроматических волн.

2.1 Спектральное описание пространственной структуры поля.

Поле световой волны, распространяющейся в свободном пространстве, подчиняется волновому уравнению:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Ограничимся рассмотрением дифракции монохроматической волны, полагая

$$E(\vec{r}, t) = 1/2 \varepsilon(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

Для комплексной амплитуда $\varepsilon(\vec{r})$ справедливо уравнение Гельмгольца

$$\Delta \varepsilon + k^2 \varepsilon = 0 \quad (2)$$

Где $k = \omega/c$. Задача дифракции состоит в отыскании решения уравнения (2), удовлетворяющего граничному условию

$$\varepsilon_0(x, y, z = 0) = \varepsilon(x, y) \quad (3)$$

Такое условие возникает, например, при прохождении света через экран типа "чёрная маска плоский транспарант, вносящий фазовую неоднородность и т. п.

Покажем, что задача дифракции может быть решена с помощью спектрального подхода.

$$\varepsilon_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (4)$$

Здесь пространственная спектральная амплитуда $\varepsilon_0(k_x, k_y)$ определяется обратным преобразованием Фурье:

$$\varepsilon_0(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (5)$$

Световое поле $\varepsilon_0(x, y, z)$ в произвольной точке пространства ищем в виде, аналогичном (4), но со спектральной амплитудой, зависящей от z :

$$\varepsilon_0(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2), находим уравнение для спектральной амплитуды $\varepsilon(k_x, k_y, z)$:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \varepsilon = 0 \quad (7)$$

И его решение

$$\varepsilon(k_x, k_y, z) = \varepsilon_0(k_x, k_y) e^{-iz(\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})} \quad (8)$$

Подставив теперь (8) в (6), получим

$$\varepsilon_0(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y + z\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})} dk_x dk_y \quad (9)$$

2.2 Спектральное описание пространственной структуры дискретного поля

Известно, что цифровой компьютер не может работать с непрерывными полями данных. Все его данные представимы только в виде матрицы, в ячейках которой стоят числа конечной точности.

Иными словами

$$\varepsilon_0(k_x, k_y) = \varepsilon_0(c_x n, c_y m) \quad (10)$$

Где $n, m \in N$

Аналогично для $\varepsilon(x, y, z), \varepsilon(k_x, k_y, z), \varepsilon_0(x, y)$. Но тогда комплексная амплитуда сигнала может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$\varepsilon_0(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M X_{n,m} e^{i\frac{2\pi}{N}nx + i\frac{2\pi}{M}my} \quad (11)$$

Где x, y - натуральные числа, N, M - максимальные значения n, m , где $X_{n,m}$ есть спектральная амплитуда, и она находится преобразование Фурье

$$X_{n,m} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \varepsilon_0(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{N}nx - i\frac{2\pi}{M}my} \quad (12)$$

Тогда из (12) следует, что спектр частот такого сигнала представляет собой набор δ -функций вида

$$X_{n,m} \delta\left(\frac{2\pi}{N}n - k_x, \frac{2\pi}{M}m - k_y\right)$$

Тогда интеграл (9) разрешим в следующем виде

$$\varepsilon(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M X_{n,m} e^{-i(k_n x + k_m y + z\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2})} \quad (13)$$

Где $k_n = \frac{2\pi}{N}n$, $k_m = \frac{2\pi}{M}m$.

Заметим, что (11), (12) есть суть обратное и прямое двумерное дискретное преобразование Фурье. Алгоритмы, позволяющие провести быстрое преобразование Фурье, существуют, а следовательно наша задача сводится к нахождению спектральной амплитуды сигнала, умножение каждой амплитуды на фазовый сдвиг $e^{-iz\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}}$ и проведение обратного преобразования Фурье, для получения $\varepsilon(x, y, z)$ в новой точке.

3 Алгоритмическая реализация задачи

3.1 Что делает пылинка с электромагнитным полем?

Вообще говоря, все зависит от относительных размеров пылинки, ее диэлектрической и магнитной проницаемости, проницаемости среды. Пылинка может поглощать, преломлять, отражать световые волны. Или при малых размерах выступать в качестве диполя внутри электрического или магнитного полей и излучать свои волны. Также пылинка может поглощать определенные длины волн, из-за уровней энергий атоме. Но в постановке задачи, **пылинки не прозрачные**, а следовательно можно считать, что

$$\varepsilon(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (14)$$

Где x_0, y_0, z_0 координаты положения пылинки

3.2 Формирование результирующего среднего поля и расчет степени расхождения и затухания пучка

Пусть $f(x, y)$ форма сигнала. Далее на пути встречаются N пылинок с координатами x_n, y_n, z_n , а L - это исследуемая длина. Отсчет начинается с $z = 0$. Тогда общая последовательность действий, для получения поля при $z = L$, это

$$\begin{aligned} f_F(x, y) &= FDPF(f(x, y)) \\ \varepsilon_1(x, y) &= BDPF(f_F(x, y))e^{-iz_1\sqrt{k^2-k_n^2-k_m^2}} \\ \varepsilon_1(x_1, y_1) &= 0 \\ \varepsilon_{1,F}(x, y) &= FDPF(\varepsilon_1); \\ \varepsilon_2(x, y) &= BDPF(\varepsilon_{1,F}(x, y))e^{-i(z_2-z_1)\sqrt{k^2-k_n^2-k_m^2}} \\ \varepsilon_2(x_1, y_1) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_L &= BDPF(\varepsilon_{N,F}(x, y))e^{-i(L-z_n)\sqrt{k^2-k_n^2-k_m^2}} \end{aligned}$$

Где $FDPF, BDPF$ - прямое и обратное преобразование Фурье, $\varepsilon_L(x, y)$ - искомое поле луча света после прохождения пылевого облака.

Таким образом мы получили результирующее поле для одного расположения пылинок. Но так как расположение пылинок в пылевом облаке случайное, то нам необходимо просмотреть все положения пылинок, а результирующее поле усреднить. Конечно все позиции пылинок просмотреть не удастся из-за ограниченности вычислительных мощностей и времени, по этому логично будет выбирать случайные положения песчинок, усреднять результаты от таких различных прохождений света, и усреднять, пока $max(\varepsilon_L - \varepsilon'_L) > E$, где $\varepsilon'_L, \varepsilon_L$ результирующие усредненные поля различных интераций, E - значение ошибки.

В результате мы получим статистически верное с учетом ошибки E распределение ε_L . Рассмотрим $|\varepsilon_L(x, y)|^2 = I(x, y)$. Радиус измеряется формулой

$$r = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (x_i - \frac{N}{2})^2 I(x_i, \frac{N}{2})}{\sum_{i=0}^N I(x_i, \frac{N}{2})}} \quad (15)$$

4 Релизация кода

Как видно выше, основная операция алгоритма - это преобразование Фурье. Соответственно система выбиралась оптимальной под алгоритм, это OpenMP система.

Вообще, давайте рассмотрим Быстрое преобразование Фурье.

```

1 public COMPLEX[ , ] FFT2D(COMPLEX[ , ] c, int nx, int ny, int dir)
2 {
```

```

3
4     for (j = 0; j < ny; j++)
5     {
6         //rows transfer
7     }
8
9     for (i = 0; i < nx; i++)
10    {
11        //columns transfer
12    }
13    return (output);
14 }

```

Но не вдаваясь в преобразование строки(оно последовательно и параллелизации не подлежит).

Вся суть двумерного преобразования в том, что оно есть Фурье преобразование сначала строк, затем столбцов. Два последовательных действия, при этом каждый подэтап этого действия памятенезависим. Конечно, при преобразовании строки, нам не нужно знать о состоянии остальной части данных. А следовательно смело параллелим основных два цикла метода.

```

1
2 #pragma omp for schedule(static)
3 for (j = 0; j < ny; j++)
4 {
5 //rows transfer
6 }
7
8 #pragma omp for schedule(static)
9 for (j = 0; j < ny; j++)
10 {
11 //columns transfer
12 }

```

Такой метод дает верные результаты и ускорение до 6.5 раз на 8 процессорах и время работы 0.11 секунд на сетке 1024 в параллельном режиме(см. графики в результатах)

Следующий этап - это фазовый сдвиг частот. По сути, умножение каждого элемента массива на какое-то число зависящее только от его координаты, элементарно параллелируется, по этому привожу результат.

```

1 #pragma omp for schedule(static)
2 for(int y = 0;y < halfsize;y++)
3 {
4     for(int x = 0;x < halfsize;x++)
5     {
6         double kz1 = sqrt(k*k-C*C*(x*x+y*y));

```

```

7      double kz2 = sqrt(k*k-C*C*((x+1)*(x+1)+y*y));
8      double kz3 = sqrt(k*k-C*C*((x+1)*(x+1)+(y+1)*(y+1)));
9      double kz4 = sqrt(k*k - C*C*(x*x+(y+1)*(y+1)));
10
11     Complex c1 = CExp(kz1 , z);
12     Complex c2 = CExp(kz2 , z);
13     Complex c3 = CExp(kz3 , z);
14     Complex c4 = CExp(kz4 , z);
15
16     map[y*size+x] = Multiply(c1 , map[y*size+x]);
17     map[y*size + size - x - 1] = Multiply(c2 ,map[y*size + size - x - 1]);
18     map[(size - y - 1)*size + size - x - 1] = Multiply(c3 ,map[(size - y - 1
19     map[(size - y - 1)*size + x] = Multiply(c4 ,map[(size - y - 1)*size + x]
20
21     }
22 }

```

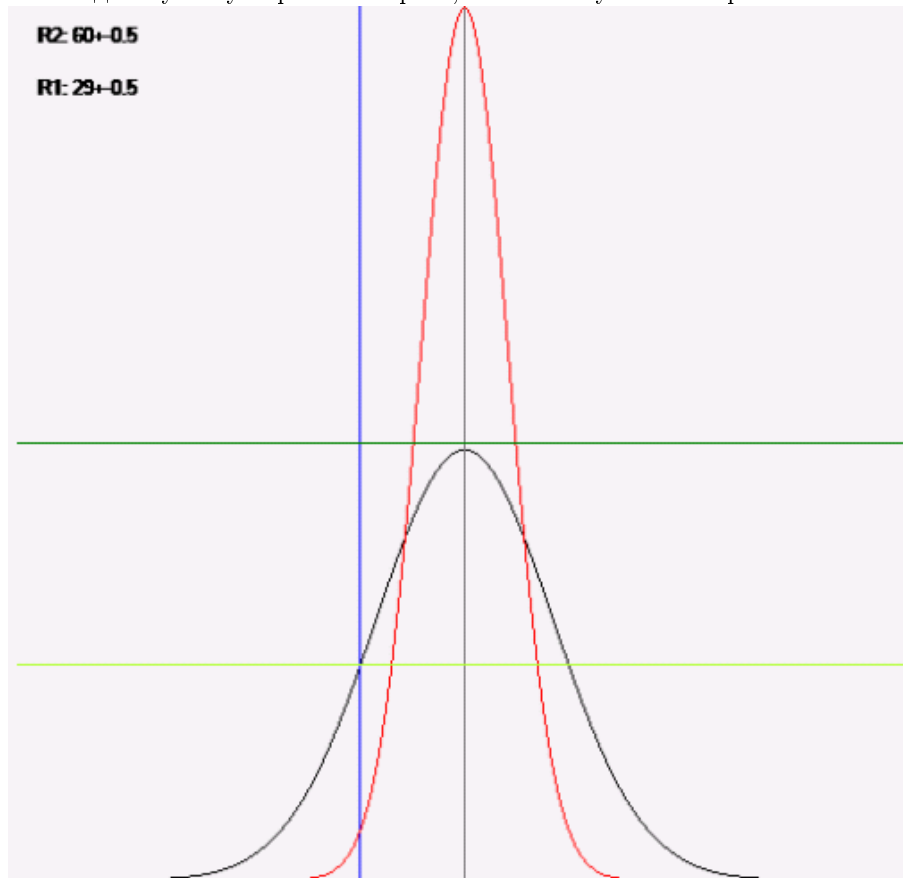
Расчет радиуса ищется по положению точки амплитудой меньшей в е раз от максимальной амплитуда пучка, что есть наша амплитуда пуска.

Для расчета радиуса используется усредненное поле интенсивностей всех вариантов пучков прошедших через случайно расположенные пылинки. Описывать методы усреднения, способы хранения данных не имеет смысла из-за очевидности их решения.

5 Результаты

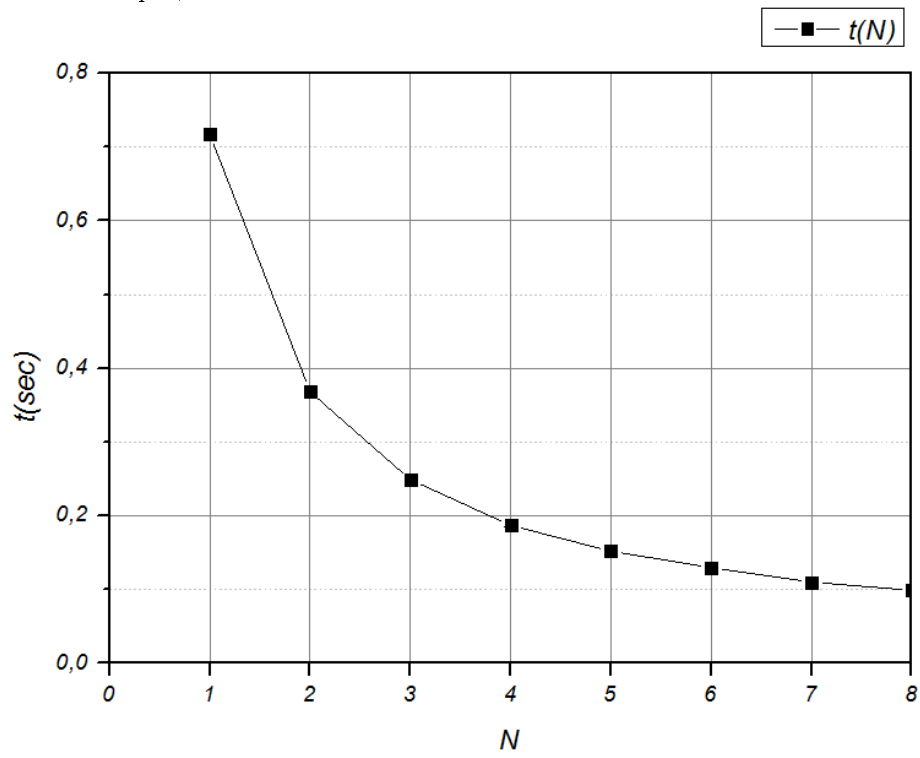
5.1 Уширение на дифракционной длине

Как видно пучок уширился в 2 раза, что согласуется с теорией.

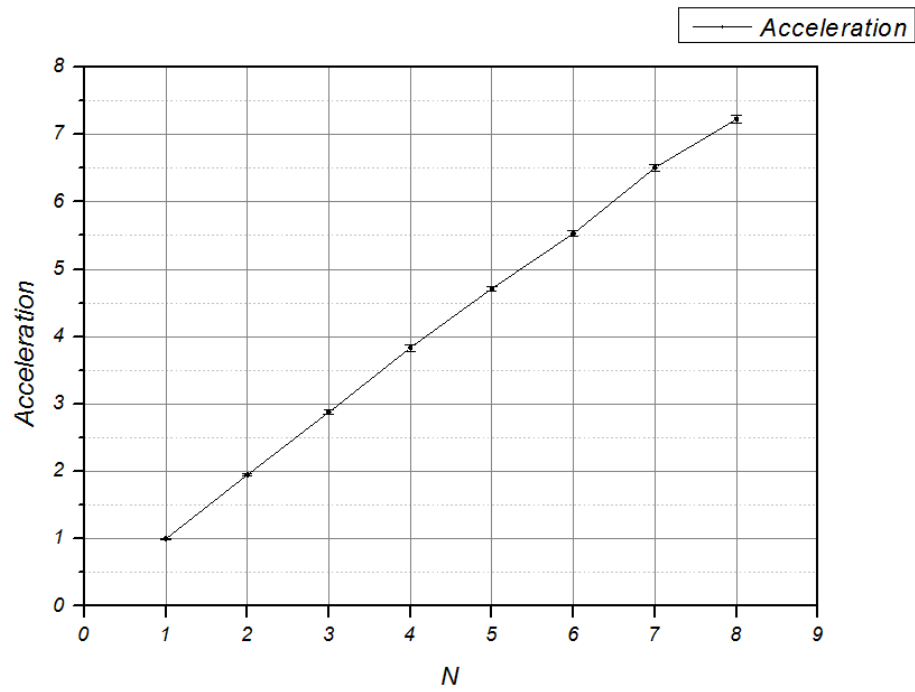


5.2 Время работы одного шага

N - число процессов

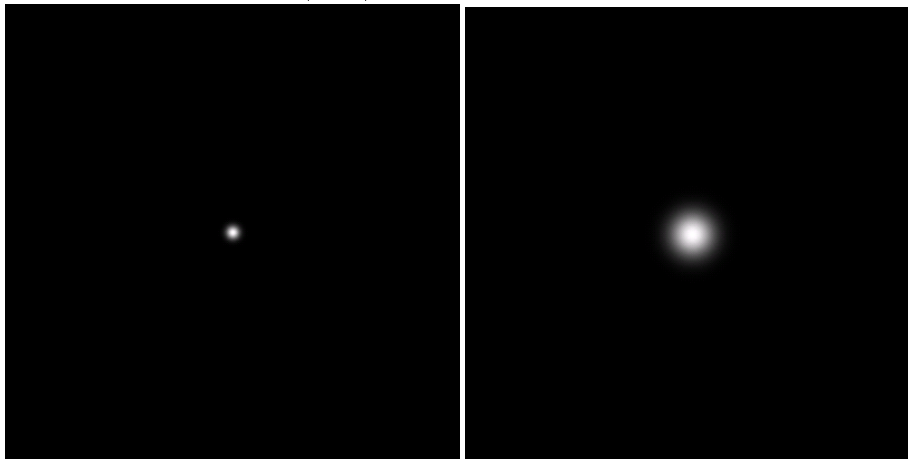


5.3 Ускорение

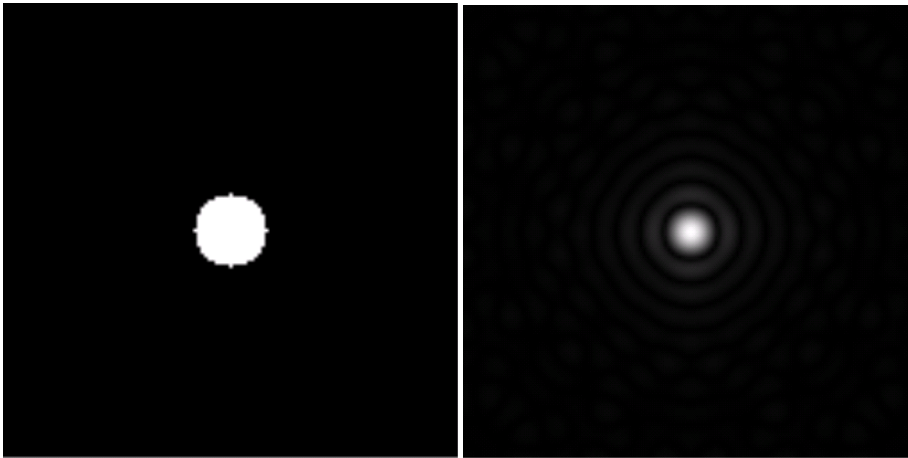


5.4 Несколько Фурье-образов

Гауссов пучок исходный(лево) и фурье-образ

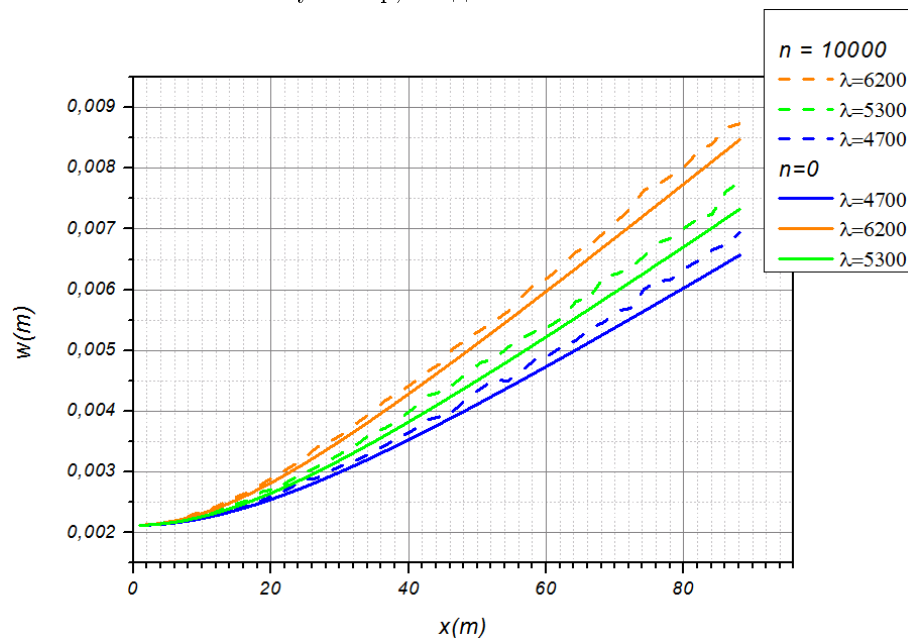


Неровное круглое отверстие(лево) и фурье-образ



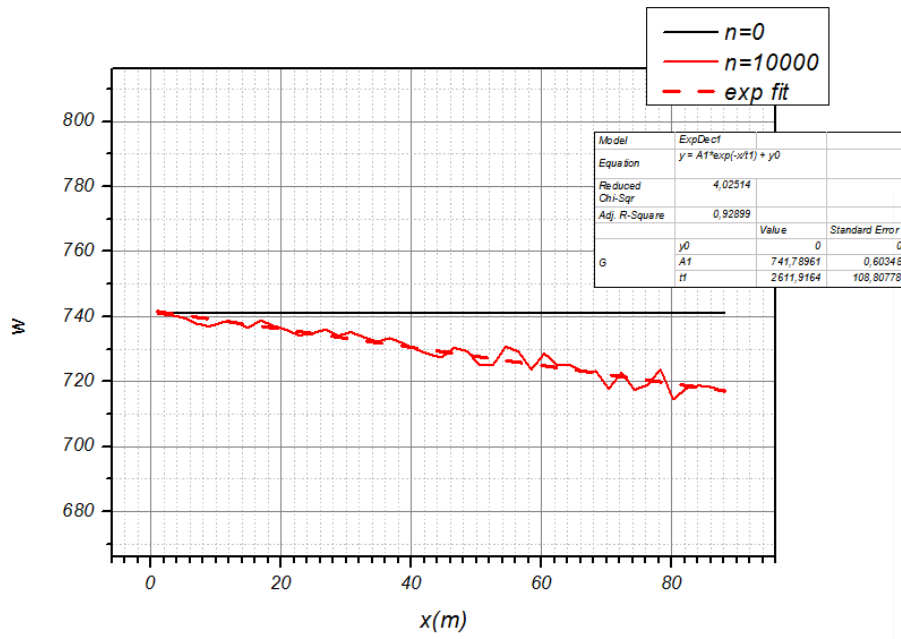
5.5 Уширение гауссова пучка для разных цветов

n - число пылинок на кубометр, λ - длина волны

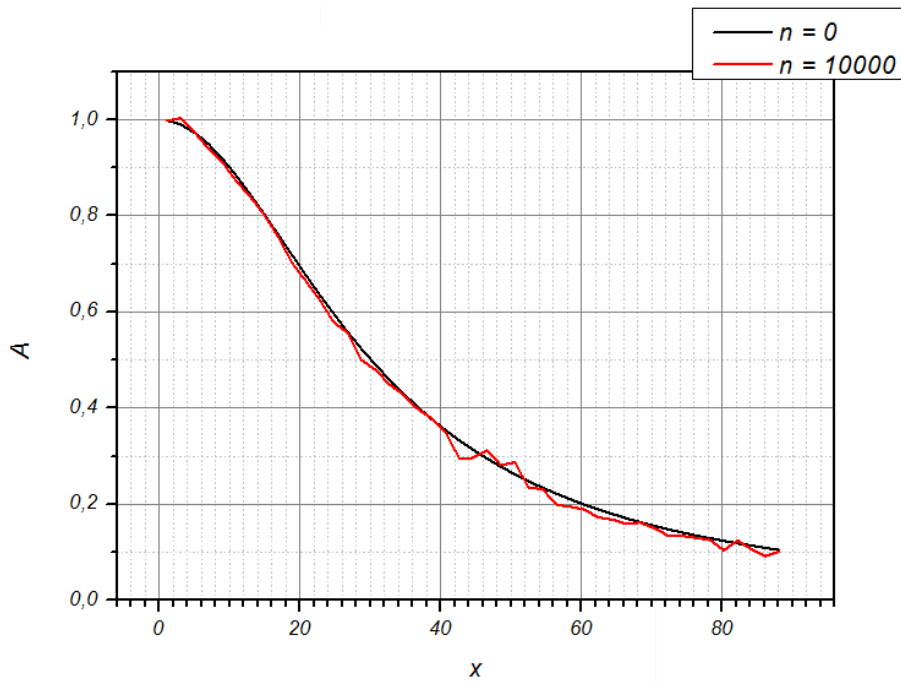


5.6 Падение энергии

Падение должно быть экспотанциальным при прохождении через облако, что видно по аппроксимации.

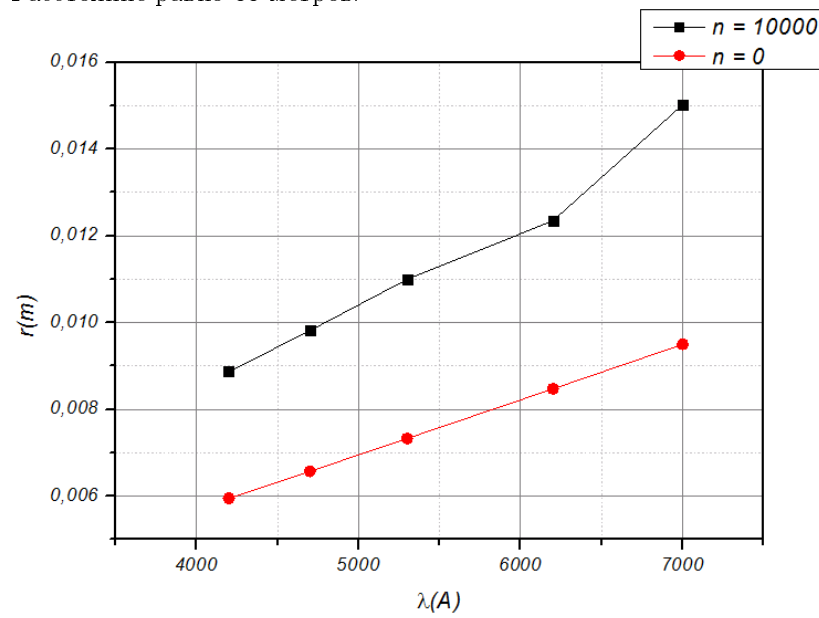


5.7 Падение амплитуды

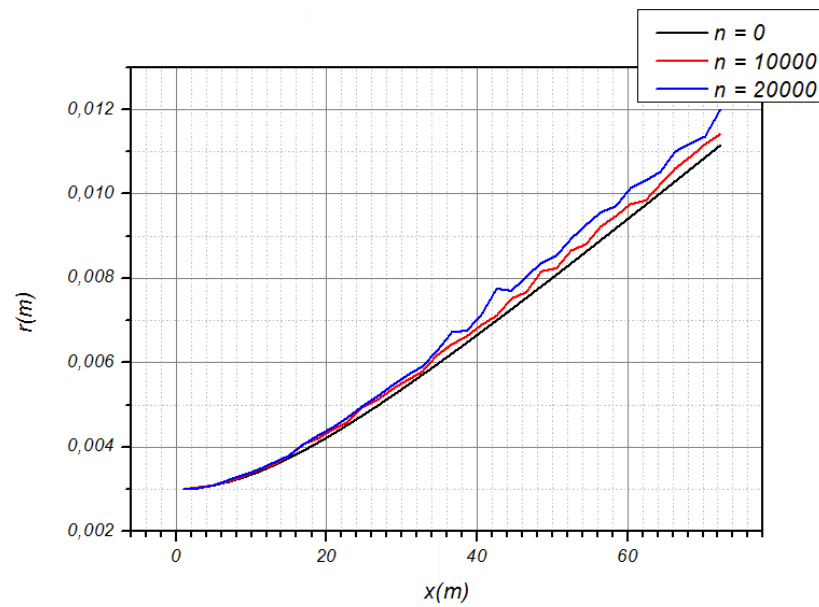


5.8 Уширение для разных длин волн

Расстояние равно 88 метрам.



5.9 Уширения для разных концентраций пыли



6 Заключение

Все теоретически предполагаемые явления были обнаружены, была построена экспериментальная зависимость радиуса пучка от расстояния, длины волны и t (параметра уширения для разных концентраций пыли).

7 Литература

- **Основные понятия Фурье-оптики**
<http://www.webpoliteh.ru/subj/optika/361-6-1-osnovnye-ponyatiya-fure-optiki.html>
- **Двумерное дискретное преобразование Фурье**
Википедия
- **Курс лекций математического анализа за 3-й семестр**
Тема: обобщенные функции, дельта функция