МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Курсовая работа по дисциплине “Параллельное программирование”

Решение уравнения теплопроводности с использованием технологии MPI. Исследование температурных зависимостей радиатора от его геометрических параметров.

Выполнил студент 2 курса группы 214
Казначеев Михаил Александрович
12 апреля 2016

1 Аннотация

В данной курсовой работе рассматривается решение уравнения теплопроводности методом конечных разностей с заданием различных граничных условий и геометрии исследуемого объекта, чтобы получить зависимость максимальной температуры объекта от его геометрических параметров, также целью является оптимизировать работу вычислительной программы и уменьшить время ее работы, используя технологию параллельного программирования MPI.

Содержание

2 Введение

Во многих практических задачах возникает необходимость поиска распределения температур в некоторых частях исследуемого объекта, определение геометрии объекта, при которой температура в заданных частях будет минимальной. Для этого численными методами решается уравнение теплопроводности с заданными граничными условиями. В данной работе используется метод конечных разностей, который активно используется при численном решении многих дифференциальных уравнений. Рассмотрим его более подробно.

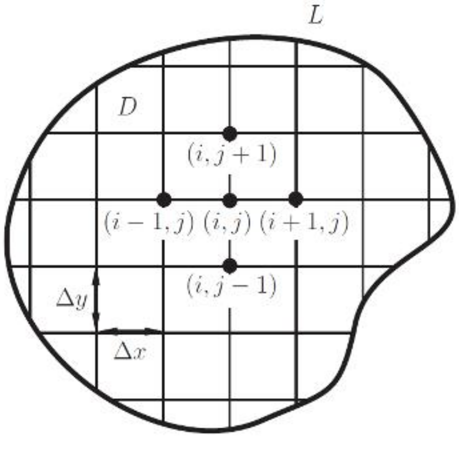
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\triangle u = f(\mathbf{r}, t)$$

Зададим начальные и граничные условия:

$$u(x, y)\mid_{t=0} = T_0,$$
$$u_L = f(s),$$

где L-граница исследуемого объекта, f(s) - функция, заданная на этой границе.

Покроем исследуемую область равномерной сеткой.



Разностная аппроксимация уравнения, где значение u на следующем шаге по времени выражено через значения на предыдущим:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k} + \triangle t\left(\frac{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}{\triangle x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}}{\triangle y^2}\right),$$

где $\triangle t$ - шаг по времени, индекс k - индекс по времени, индексы i и j - по координатам x и y соответственно.

Данное выражение позволяет вычислять значения u в следующие моменты через значения в предыдущие моменты времени в этой и соседних точках.

Критерий установления решения:

$$max_{i,j}|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k}| < \varepsilon,$$

где ε - заданное малое число.

Критерий устойчивости решения:

$$\triangle t < \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{\triangle x^2} + \frac{1}{\triangle y^2}\right)^{-1}.$$

Таким образом, построим следующую итерационную схему:
1. t=0, k=0, $u_{i,j}^0 = T_0$ для всех внутренних точек области D, $u_L^0 = f(s)$ для всех точек на границе L.
2. Вычисляем значения $u_{i,j}^{k+1}$.
3. Если критерий установления не выполняется, то $t = t + \triangle t$, $k = k + 1$, переход на шаг 2, если выполняется, то итерационный процесс завершается.

Чтобы исследовать зависимость температуры в радиаторе от его геометрических параметров, данный итерационный процесс повторяется с последовательным изменением необходимого коэффициента, после чего данная зависимость изображается графически и анализируется. Это позволит сделать выводы о том, как различные параметры влияют на распределение температуры в системе.

Данная итерационная схема реализуется с использованием технологии параллельного программирования MPI (подробнее см.ниже).

3 Описание реализации

В программе используется технология MPI, поэтому сетка, указанная в итерационной схеме, разбивается на полосы, каждую из которых будет обрабатывать отдельный процесс. Между процессами реализуется обмен граничными условиями, соответственно, при увеличении числа процессов, каждый из них будет обрабатывать лишь небольшую полосу, что позволит значительно уменьшить время работы по сравнению с последовательной реализацией.

В результате каждый процесс хранит свою полосу, которую обрабатывает, также 2 соседние строки, в которых содержит граничные условия. После каждой итерации происходит обмен необходимыми значениями. Вычисляется максимальная разница между итерациями для всех процессов и осуществляется одновременная рассылка этой разницы всем процессам, проверяется условие установления решения.

В задаче в качестве объекта рассматривается радиатор, имеющий форму буквы «Ш» с изменяемым числом зубцов и другими геометрическими параметрами. Соответственно, имеются области («пустоты»), в которых производить вычисления нет необходимости, и равномерное деление полос по процессам окажется не столь эффективным, так как «нижние» процессы вынуждены обрабатывать полосу целиком, а «верхние» - лишь некоторую ее часть, поэтому в программе реализуется неравномерное деление сетки по полосам, что позволит эффективнее задействовать доступные ресурсы, не заставит «стоять» отдельные процессы.

Тем не менее, эффективность такого усложнения не столь высока, так как больший интерес представляет геометрия радиатора с большим числом длинных зубцов (это будет видно из последующего анализа полученных результатов), то есть «пустот» будет не так много, чтобы перераспределять нагрузку между процессами.

Для исследования температурных зависимостей от различных геометрических параметров эксперимент многократно повторяется, по полученным данным строятся графики этих зависимостей, анализируются результаты.

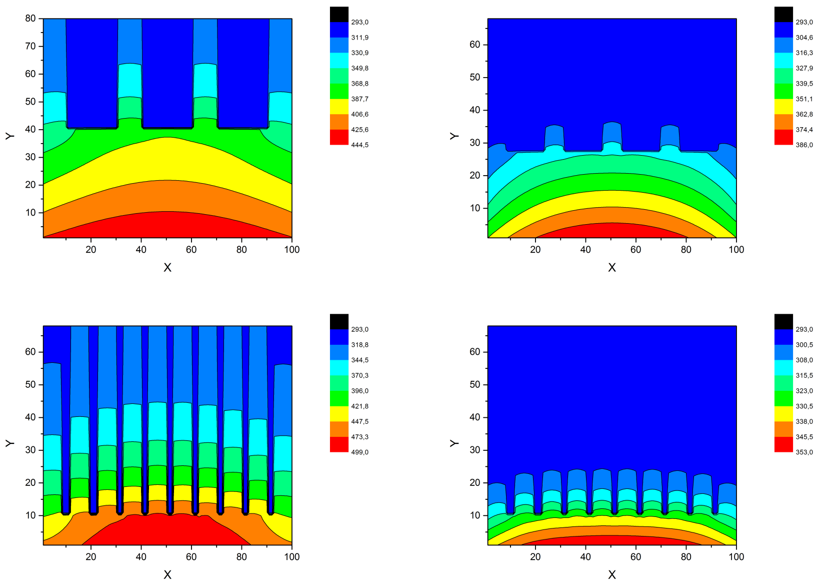
Данное исследование требует больших вычислительных мощностей, что позволяет говорить о целесообразности и эффективности использования технологий параллельного программирования.

4 Анализ результатов

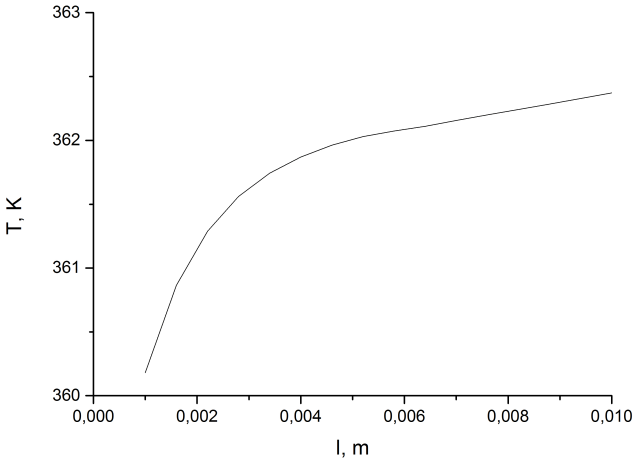
Численно решив уравнение теплопроводности, получим распределение температуры в радиаторе.

В рамках исследуемой модели к нижней части подводится некоторое постоянное количество теплоты, а обмен с воздухом пропорционален разнице между температурой радиатора в данной точке и температурой воздуха, принятой за константу. Последнее допущение приводит к определенной неточности данной модели, так как температура воздуха между выступами может быть сравнима с температурой самих выступов, что вносит существенные изменения в распределение температур, тем не менее основные зависимости можно проследить и в рамках используемой модели, но вышесказанное будет учтено при анализе этих зависимостей.

Графические изображения распределения температур при различных параметрах представлены ниже.

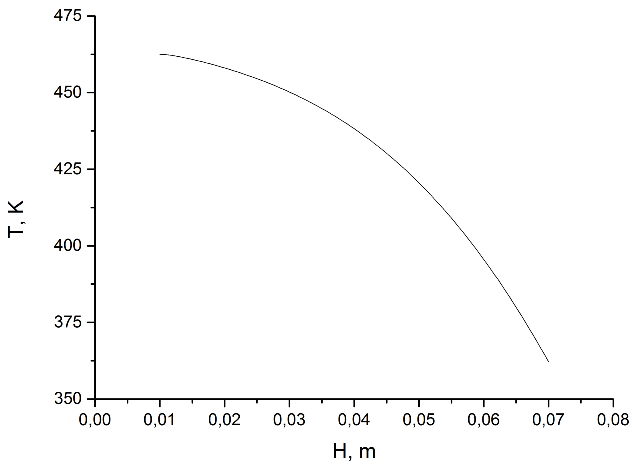


Рассмотрим влияние различных геометрических параметров на температуру у основания.

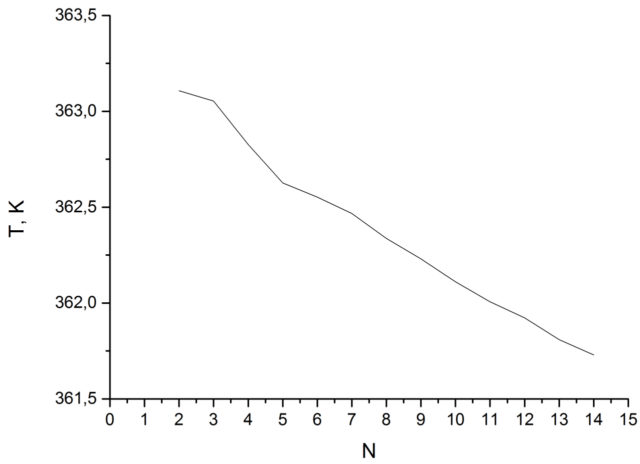


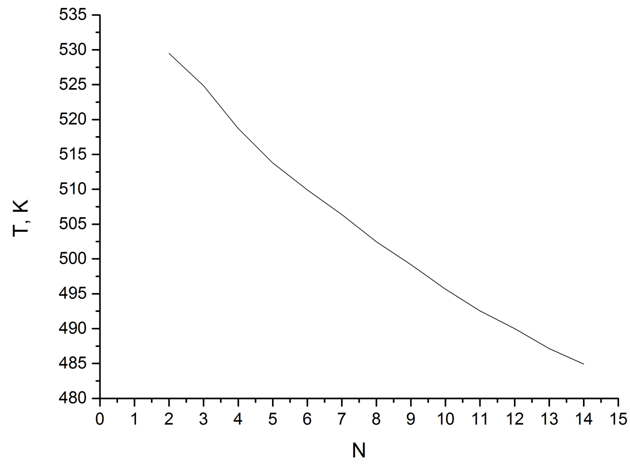
Зависимость температуры от ширины выступов.

Уменьшение ширины выступов привод к тому, что площадь поверхности, с которой идет отвод тепла, становится ближе расположена к источнику этого тепла, а так как в данной модели отдаваемое тепло прямо пропорционально разности температур между радиатором и воздухом, то температура радиатора снижается, но в данной модели температура воздуха принята за константу, что не отражает действительность, поэтому это не эффективный способ снижения температуры радиатора.



Зависимость температуры от высоты выступов при неизменной высоте радиатора.

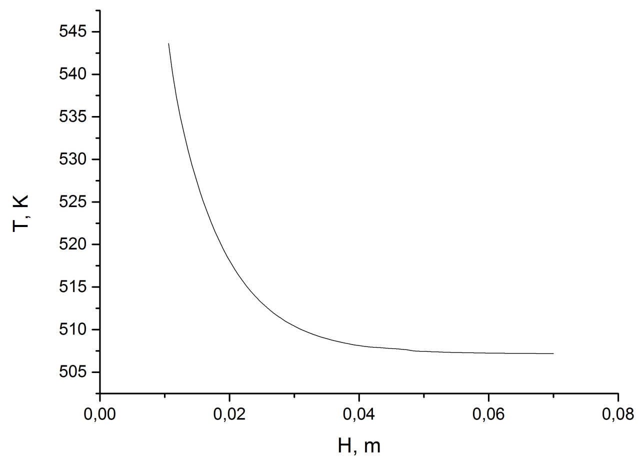




Зависимость температуры от числа выступов.

Представлены графики для различных параметров системы, чтобы ярче продемонстрировать данную зависимость.

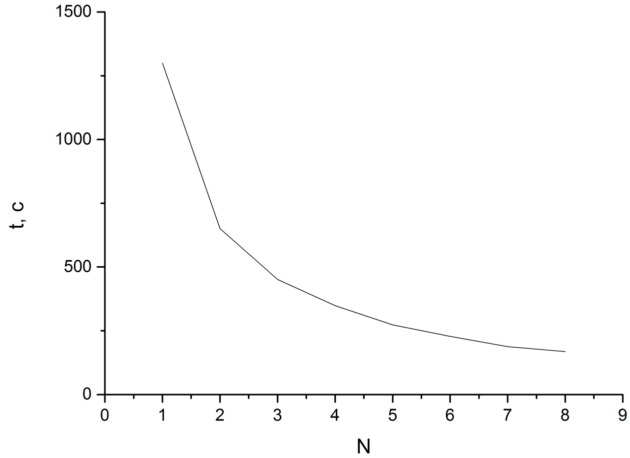
Увеличение площади поверхности, которая отдает тепло в окружающую среду, приводит к уменьшению температуры радиатора, но есть ряд ограничений. Так технически невозможно до бесконечности увеличивать число выступов, к тому же модель, не учитывающая изменения температуры воздуха, не позволяет точно определить влияние числа выступов на распределение температур.



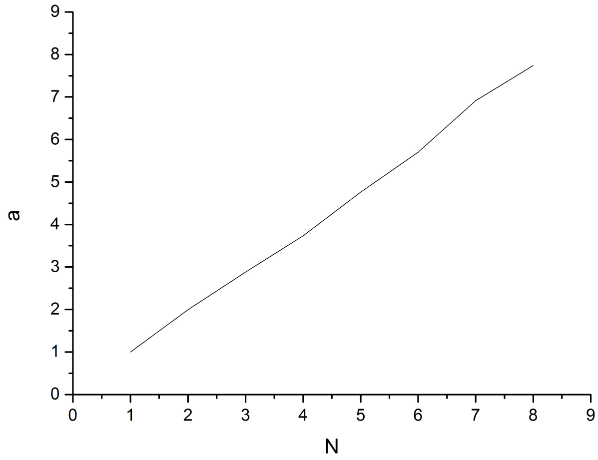
Зависимость температуры радиатора от высоты выступов.

Увеличение площади поверхности приводит к уменьшению температуры радиатора, но бесконечно удлинять выступы смысла нет, так как тепло не будет распространяться до их дальних частей, и соответственно отдачи тепла с дальних поверхностей происходить не будет.

Теперь рассмотрим эффективность использования технологий параллельного программирования.



Зависимость времени работы программы от числа процессов.



Зависимость ускорения программы от числа процессов.

Из представленных графиков видно, что использование технологий параллельного программирования оказывается очень эффективно в данной задаче. Это ясно исходя из используемой итерационной схемы, так как сетка, на которой происходят вычисления, разбивается на полосы, каждую из которых обрабатывает отдельный процесс, но появляются затраты на обмен граничными условиями и синхронизацию между процессами.

5 Выводы

Увеличение площади поверхности приводит к уменьшению максимальной температуры в радиаторе, для реализации этого можно увеличивать число выступов, уменьшать их ширину, увеличивать высоту выступов, увеличивать высоту радиатора, но все эти методы имеют определенные ограничения, так, например, кроме чисто технических сложностей, возникающих при создании большего числа тонких выступов, есть и физические ограничения. Повышение температуры воздуха между выступами приводит к снижению отдаваемого тепла, соответственно увеличение площади за счет числа выступов ничего не изменит, если температура воздуха сравнима с температурой выступов. Увеличение высоты радиатора также имеет ограничение, так как после определенного значение тепло уже не распространяется до дальних частей выступов, поэтому никакой отдачи тепла не происходит. Основные зависимости ясны, но они имеют свои ограничения, которые необходимо учитывать, более детально исследовать эти ограничения можно только в рамках более точной модели.

Использование технологий параллельного программирования - эффективный способ значительно ускорить получение результатов в рамках данной задачи.

6 Список литературы

1. Р.Ф. Марданов "Численные методы решения плоской задачи теплопроводности"

2. А.Н. Матвеев "Молекулярная физика"

3. *https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation*