Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

физический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MPI

Выполнил
студент 2 курса группы 205
Комов Н.А.

«20» мая 2016 года

Москва
2016

Аннотация

Целью данной работы является применение численных методов и методов параллельного программирования для решения задачи теплопроводности. Необходимо определить зависимость количества теплоты, ушедшего из комнаты, в зависимости от времени и от геометрической конфигурации области

1 Введение

Уравнеие теплопроводности - дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое описывает распределение температуры в заданной области пространства и ее изменение во времени.

Получим уравнение теплопроводности без источников. Обозначим через S границу объема V, и пусть n - внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье через поверхность S и объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \int\limits_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t = \int\limits_S (\lambda \nabla T, n) dS \Delta t$$

В силу формулы Остроградского-Гаусса, имеем

$$Q_1 = \int\limits_V (\nabla, \lambda \nabla T) dV \Delta t$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ изменилась на величину

$$T(x, t + \Delta t) - T(x, t) \approx \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

То для этого, в силу Первого начала термодинамики, необходимо затратить количество тепла

$$Q_2 = \int\limits_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \Delta t$$

В силу сохранения количества теплоты в объеме V, имеем $Q_1 = Q_2$

$$\int\limits_V ((\nabla, \lambda \nabla T) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t}) dV \Delta t = 0$$

Откуда, по причине произвольности объема V, получаем уравнение теплопроводности без источников

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla, \lambda \nabla T)$$

В случае однородной среды, имеем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

1.1 Постановка задачи

Пусть мы с вами находимся в комнате, поддерживаемой при постоянной температуре $T_1 = 293K$. И пусть стены этой комнаты являются теплоизолированными ($\frac{\partial T}{\partial n} = 0$). Вырежем часть стены и вставим туда окно, размерами 0.05(м)×0.5(м)×1.0(м). Окно по окантовке будет состоять из кирпича, внутри из чередующихся воздуха и стекла. Поставим для нашего уравнения начально-краевую задачу

$$\begin{cases} c_j \rho_j \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_j \Delta T \\ T(x, y, z, 0) = T_0, \quad (0 < x < L, 0 < y < D, 0 < z < H) \\ T(0, y, z, t) = T_l, \\ T(L, y, z, t) = T_r, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad\qquad (y = 0, y = D) \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \qquad\qquad (z = 0, z = H) \end{cases}$$

1.2 Исследуемая область

Исследуемая область представляет собой трехмерный параллелипипед (окно). Раму окна сделам из керамического кирпича, а внутрь рамы вставим пятикамерное стекло (стекло-воздух)
$j = 1, 2, 3$, где
1)Стекло $\quad (0.005 * i \leq x \leq 0.005 * (i-1), i = 0, 2, 4, 6, 8, 10; 0.1 \leq y \leq 0.4; 0.2 < z < 0.8)$
2)Воздух $\quad (0.005 * i \leq x \leq 0.005 * (i-1), i = 1, 3, 5, 7, 9; 0.1 \leq y \leq 0.4; 0.2 < z < 0.8)$
3)Керамический кирпич $\quad (y \leq 0.1, y \geq 0.4; z \leq 0.2, z \geq 0.8)$

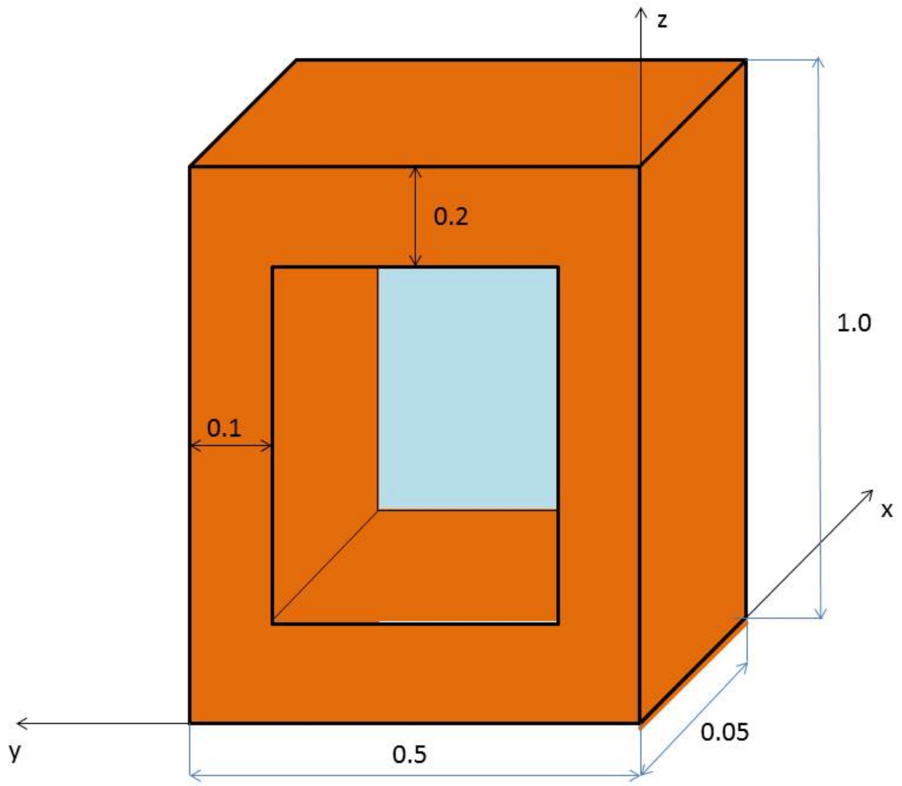

Рис. 1: Чертеж исследуемой области(окна)

Теплофизические парметры сред (значения указаны в системе си)

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.002 & \frac{\text{Вт}}{\text{м}*\text{К}} \\ \lambda_2 = 0.025 & \frac{\text{Вт}}{\text{м}*\text{К}} \\ \lambda_3 = 0.56 & \frac{\text{Вт}}{\text{м}*\text{К}} \\ \rho_1 = 2550 & \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ \rho_2 = 1.2047 & \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ \rho_3 = 1800 & \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ c_1 = 835 & \frac{\text{Дж}}{\text{кг}*\text{К}} \\ c_2 = 1006 & \frac{\text{Дж}}{\text{кг}*\text{К}} \\ c_3 = 1000 & \frac{\text{Дж}}{\text{кг}*\text{К}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0 = 283K & \\ T_l = 293K & \text{температура в комнате} \\ T_r = 273K & \text{температура на улице} \end{cases}$$

2 Численные методы

Для решения исходной задачи будем применять метод переменных направлений ([1], [2]), но в другом варианте

Разбиваем область XYZ на три ортогональных направления, X, Y, Z.

$$c_j\rho_j\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_j\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

По XY будем прогонять классическим методом переменных направлений, а по Z, да бы увеличить эффективность паралельной программы, прогонять по явной схеме

$$\rho_j c_j\frac{T_k^n - T_k^{n+1}}{\tau} = \lambda_j\frac{T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h_z^2}$$

2.1 Условия на границе двух сред

На границе двух сред имеем

$$\begin{cases} T_1(t, z_0) = T_2(t, z_0) \\ \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial z}(t, z_0) = \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z}(t, z_0) \end{cases}$$

Откуда, для явной схемы, получаем

$$\lambda_1\frac{T_{k-1} - T_k}{hz} = \lambda_2\frac{T_k - T_{k+1}}{hz}$$

$$T_k = \frac{1}{2}(\lambda_1 T_{k-1} + \lambda_2 T_{k+1})$$

Про определение прогоночных коэффициентов для неявной схемы можно прочитать в [2]

3 Реализация программы

Код программы был написан на языке Fortran 90 с использованием библиотеки MPI.

Разбиение области интегрирования производится равномерно по потокам (по оси Z)

Результатом работы программы является определение количества теплоты, ушедшего из комнаты в зависимости от длины (t - фиксировано) и от времени (L - фиксировано)

3.1 Определение количества теплоты

В соотвествии с законом Фурье

$$Q = \int_{t_0}^{t_1}\int_S \lambda\frac{\partial T}{\partial n}dSdt$$

Интегрирование производится по поверхности $(x = 0; 0 < y < D; 0 < z < H)$

$$T_n(j, k) = \frac{\partial T}{\partial n}(j, k) = \frac{T(2, j, k) - T(1, j, k)}{hx}$$

Сведем интеграл к повторным интегралам

$$Q = \int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^H dz\int_0^D \lambda_i T_n dy$$

Интегрирование повторных интегралов будем проводить с помощью метода трапеций

$$q_z(k) = \sum_{j=2}^{N_y-1}\lambda_i T(j, k)h_y$$

$$q = \sum_{k=n1}^{n2} q_z(k)h_z$$

$$Q = \sum_{t=t_0}^{t_1} q(t)\tau$$

4 Результат работы программы

В результате работы были получены следующие результаты

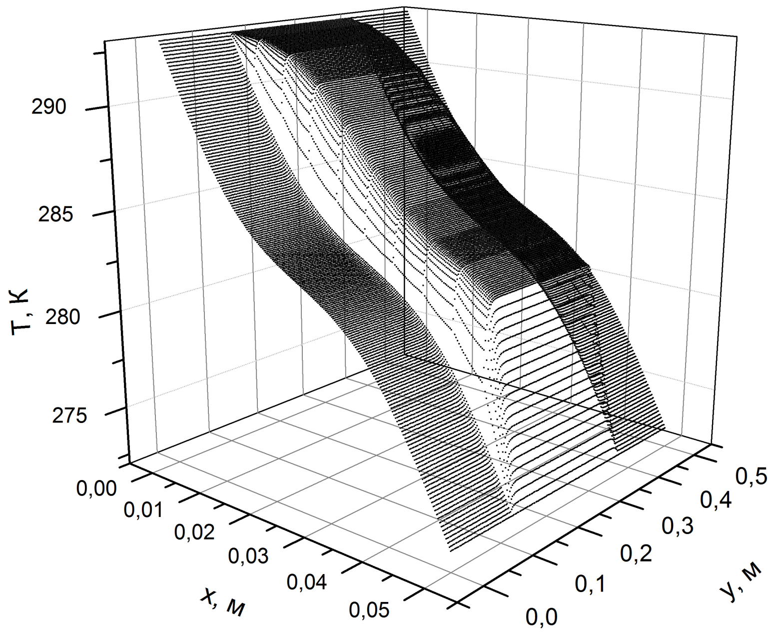

Рис. 2: Распределение температуры в установленном режиме при $z = 0.3$(м) (t = 500(с))

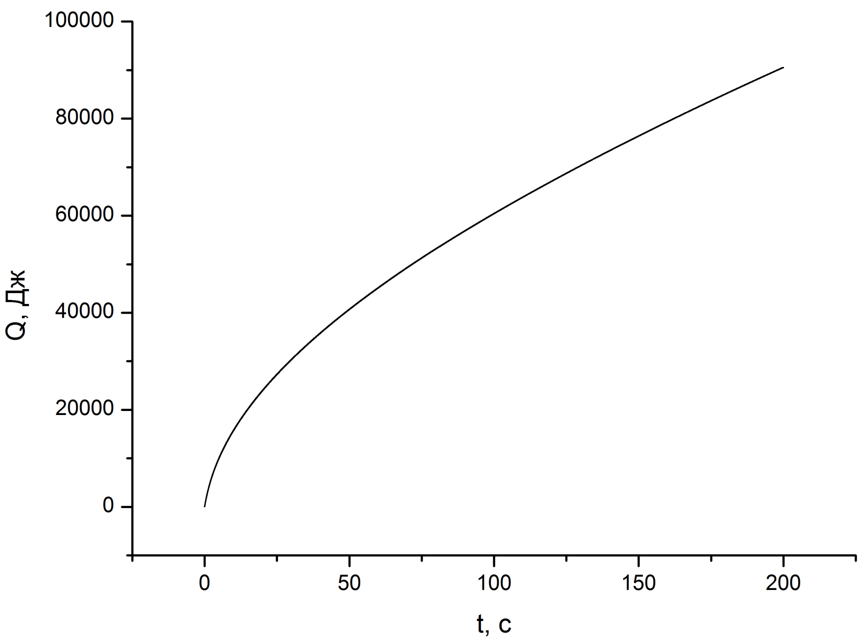

Рис. 3: Зависимость ушедшего количества теплоты от времени (L = 0.05(м))

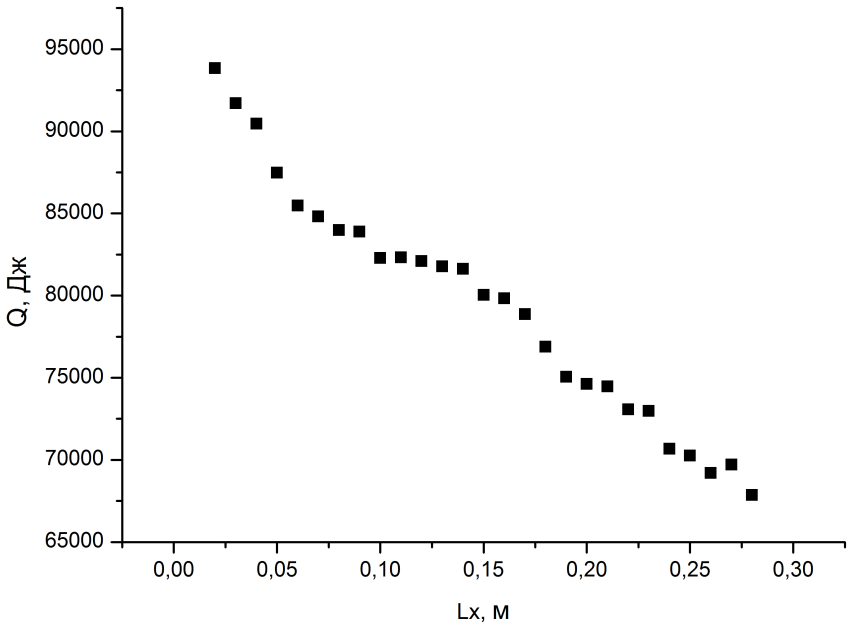

Рис. 4: Зависимость ушедшего количества теплоты от L (t = 200(c))

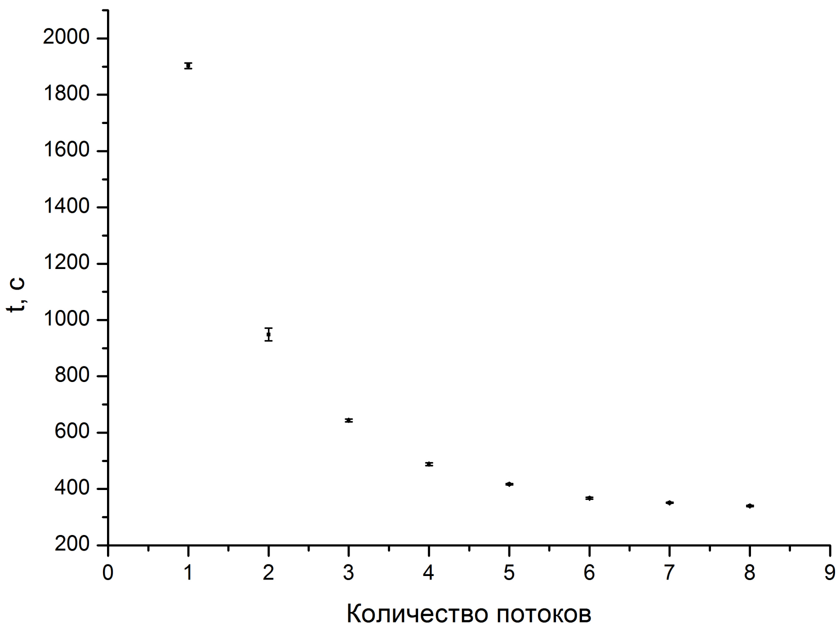

Рис. 5: Зависимость времени выполнения программы от количества потоков (t = 200(c))

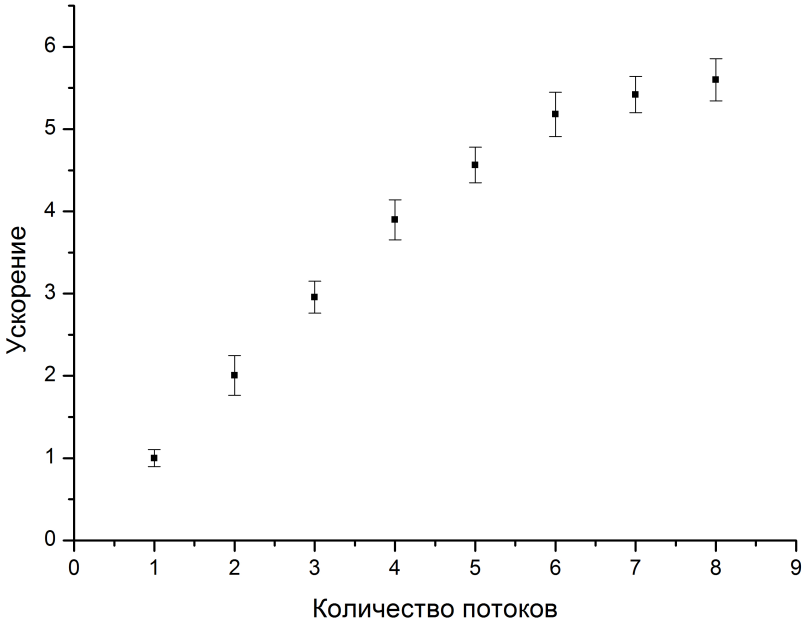

Рис. 6: Зависимость ускорения от количества потоков (t=200(с))

4.1 Стационарный режим

Как видно из рис. 3, при $t \approx 100$(с) устанавливается стационарный режим, то есть температура перестает зависить от времени, а следовательно, количество теплоты, уходимое из комнаты будет зависеть линейно от времени.

Распределение температуры при $z = 0.3$(м) показано на рис. 2

Количество теплоты, покидаемое комнату в единицу времени, равно

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = P = 277 \pm 4 \quad \text{Вт}$$

4.2 Выводы из проделанной работы

Основная задача, поставленная перед программой, выполнена. Был ускорен процесс численного решения уравнения теплопроводности в трехмерной области(~ 5.5 на восьми потоках)

Из закона Амдала следует, что параллельная часть программы составляет 95.5 процентов, что в пределе дает ускорение в 22 раза

Вместе с эффективностью, программа способна решать задачи, требующие средней-высокой точности вычислений(зависит от выделения памяти на вычислительном кластере)

Программа требует небольшой переделки, то есть, необходимо распараллелить задачу так, чтобы использовать абсолютно устойчивый метод переменных направлений (и с меньшей погрешностью), не потеряв при этом в производительности

Список литературы

[1] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*

[2] Г. В. Кузнецов, М. А. Шеремет *Разностные методы решения задач теплопроводности*