

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Курсовая работа по дисциплине
“Параллельное программирование”

**Моделирование распространения электромагнитной волны в
среде с диэлектриком методом конечных разностей во
временной области.**



Выполнил студент 2 курса группы 214
Жолковский Евгений Константинович

1 Аннотация

В работе моделируется взаимодействие плоской гармонической электромагнитной волны со стеклянным шаром, лежащим на диэлектрической пластине. Моделирование проводится методом конечных разностей во временной области (Finite-Difference Time-Domain, FDTD) используя алгоритм Йи (Yee).

Содержание

1	Аннотация	2
2	Введение	4
3	Численные методы	4
4	Реализация	6
4.1	Параллелизация FDTD	6
4.2	Моделирование задачи с диэлектриком	7
5	Результаты	9
5.1	Полученная картина	9
5.2	Эффективность параллельных вычислений	10
6	Итоги	11
	Список литературы	11

2 Введение

В различных областях физики и инженерии возникает потребность в расчете и моделировании распространения электромагнитных волн в различных однородных и сложных средах. Такая необходимость возникает, например, при производстве радиоаппаратуры (антенны, устройства связи), в оптике (расчет фотонных кристаллов, биофотоника), геофизике и многих других областях. К преимуществам метода можно отнести:

- Универсальность
- Высокая эффективность параллельных вычислений
- Удобство моделирования анизотропных, нелинейных, дисперсных систем со сложной геометрией

3 Численные методы

Алгоритм Йи заключается в разбиении исследуемой области на две трехмерные прямоугольные сетки E и H полей электрической и магнитной напряженностей, сдвинутые относительно друг друга на половину шага дискретизации, и последовательном вычислении их значений.

Уравнения Максвелла для однородной среды имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

С учетом материальных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \end{cases}$$

Получим:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j} \right), \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{E}$$

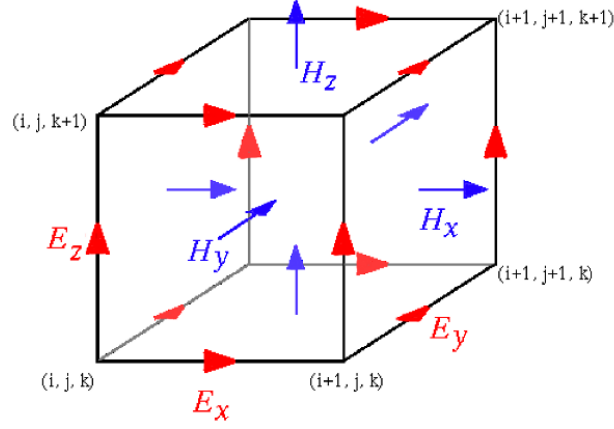


Рис. 1: Алгоритм Йи

Пусть $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ - шаги сетки по трем координатам и времени. Будем обозначать положение элемента в области тремя числами i, j, k и определять положение в пространстве как $(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$. С помощью алгоритма Йи можно приближенно найти $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}$ в каждой точке:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{\vec{E}_{i+1/2,j,k}^n - \vec{E}_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2].$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{\vec{H}_{i+1/2,j,k}^n - \vec{H}_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2].$$

Используя определение ротора:

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\text{rot } \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

с помощью алгоритма Йи можно определить значение $\text{rot } \vec{E}_{i,j,k}^n$ и $\text{rot } \vec{H}_{i,j,k}^n$ в каждой точке (i, j, k) .

Применение приближения дает:

$$\frac{\vec{E}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{E}_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{E}_{i,j,k}^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k}} \left(\text{rot } \vec{H}_{i,j,k}^{n+1/2} - \vec{j}_{i,j,k}^n \right)$$

$$\frac{\vec{H}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{H}_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{H}_{i,j,k}^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0 \mu_{i,j,k}} \text{rot } \vec{E}_{i,j,k}^{n+1/2}$$

и, следовательно:

$$\vec{E}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{E}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k}} \left(\text{rot } \vec{H}_{i,j,k}^{n+1/2} - \vec{j}_{i,j,k}^n \right)$$

$$\vec{H}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{H}_{i,j,k}^n + \frac{-\Delta t}{\mu_0 \mu_{i,j,k}} \text{rot } \vec{E}_{i,j,k}^{n+1/2}$$

Величина Δt ограничена условием Куранта:

$$\Delta t < \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}},$$

4 Реализация

4.1 Параллелизация FDTD

Определим класс **v3** трехмерных геометрических векторов с операциями сложения, вычитания, умножения на число, скалярного и векторного произведений и т.д. Класс состоит из трех элементов типа **double**: **x**, **y**, **z**. Исследуемая область представляет собой трехмерную область размерами (**size.x**, **size.y**, **size.z**). **d.x** = Δx , **d.y** = Δy , **d.z** = Δz - шаг разбиения по каждой оси. **v3 gsize** - число элементов разбиения по каждой оси **gsize.x** = **size.x** / **d.x** + 1 и т. д. Определим трехмерные массивы **v3 E**, **H**, **e1**, **ji** размера **gsize** с сетками электрической и магнитной напряженностей, диэлектрической проницаемости и токов соответственно. Для запуска программы на кластере для параллельных вычислений используется технология MPI. **numThr** - число потоков MPI. Исследуемая область делится на **numThr** частей по числу узлов. Для оптимальной работы требуется, чтобы размеры всех областей были примерно одинаковы. В каждом потоке создается массив **part[numThr]**, *i*-тый элемент которого равен размеру области в *i*-том потоке. Этот массив используется в функциях **glob2loc()** и **loc2glob()**, которые определяют координату элемента в потоке по координате в области и наоборот. В каждом массиве создаем массивы **E**, **H**, **e1** и **ji**, размер которых по оси *x* равен **m** = **part[i]** + 1 в крайних потоках (0 и **numThr**-1) и **m** = **part[i]** + 2 в остальных. В каждой итерации последовательно выполняются:

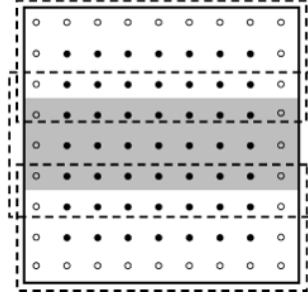


Рис. 2: Распределение области по потокам.

- Обмен граничными H с соседними потоками
- Вычисление E через H
- Обмен граничными E с соседними потоками
- Вычисление H через E

Обмен граничными значениями заключается в пересылке значений второго с края слоя из одного потока в крайний слой соседнего потока. Пересылка осуществляется при помощи функций `MPI_Send()` и `MPI_Recv()`. Вычисление значений E и H производится во всех точках, кроме крайних.

Геометрия системы определяется заданием значений диэлектрической проницаемости в массиве `e1`. Для задания этих значений используются функции `glob2loc()` и `loc2glob()`.

4.2 Моделирование задачи с диэлектриком

Параметры системы:

$\lambda = 500, nm$	длина волны
$T = \lambda/c = 1.67 \cdot 10^{-15}, c$	период колебания
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3.76 \cdot 10^{15}, c^{-1}$	частота колебаний
$R = \lambda/4 = 125, nm$	радиус шарика
$\varepsilon_{sphere} = 4.0$	диэлектрическая проницаемость шарика
$d = \lambda/4 = 1000, nm$	толщина пластины
$\varepsilon_{plate} = 3.0$	диэлектрическая проницаемость пластины

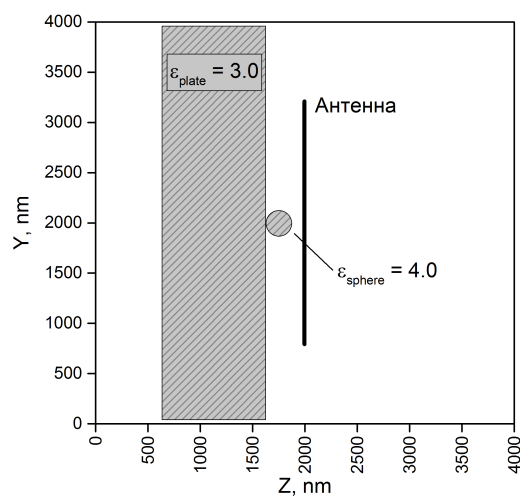


Рис. 3: Схема расположения объектов в системе.

Для моделирования взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрическим шаром, лежащим на пластине из диэлектрика, создадим трехмерную кубическую область со стороной 8λ . Посередине разместим антенну - плоскость, по которой пропускается ток по гармоническому закону. На расстоянии $\lambda/2$ от центра пластины разместим шарик, а сразу за ним пластину. Это делается для того, чтобы краевые эффекты от границ области и антенны, которые видны на рисунке 4, были менее существенны и волну можно было бы считать гармонической. Схема системы представлена на рисунке 3.

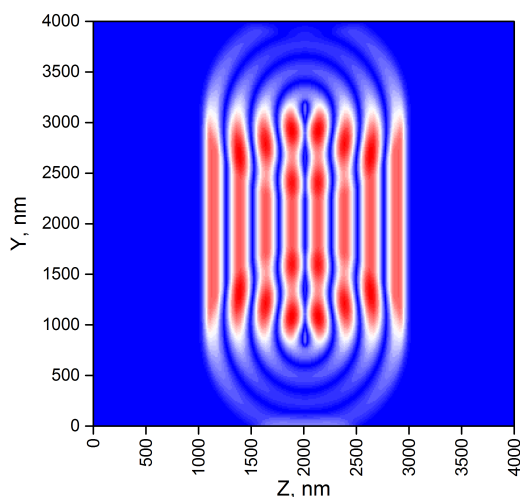


Рис. 4: Напряженность электрического поля около антенны

Размер одного элемента разбиения возьмем $\Delta = \lambda/40$. Из-за большого размера сетки программа требует много оперативной памяти: около двух с половиной гигабайт для данного разбиения. На персональном компьютере не получается запустить программу с таким разбиением. Поэтому расчет проводится на параллельном кластере. Расчет на 32 узлах на суперкомпьютере "Ломоносов" для времени $2T$ и разбиения $\lambda/40$ длится около минуты и требует 90 мегабайт оперативной памяти в каждом узле.

5 Результаты

5.1 Полученная картина

Визуализация результатов показывает ожидаемые результаты: электромагнитная волна рассеивается на диэлектрическом шарике, ее скорость распространения и амплитуда в диэлектрике меньше, чем в вакууме. Состояния системы с $t = 0$ до $t = 3T$ представлены на рисунках 5 - 10.

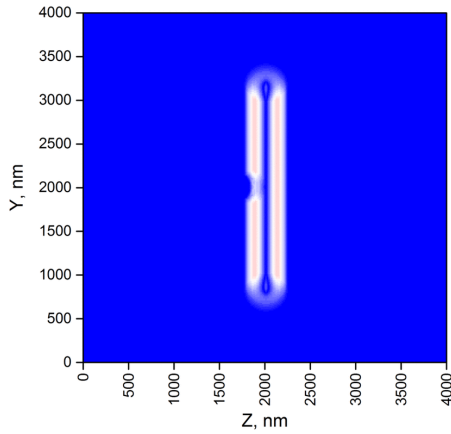


Рис. 5: $t = 0.5 \cdot T$

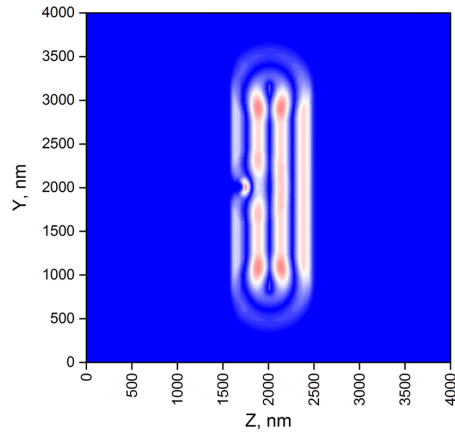
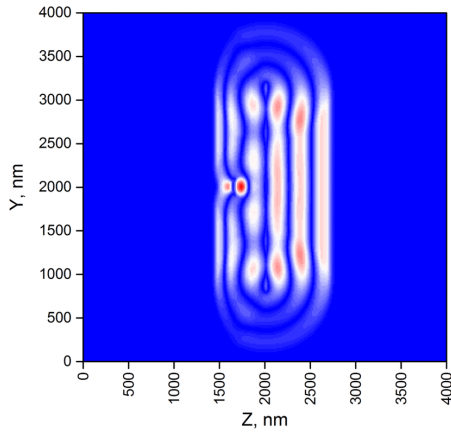
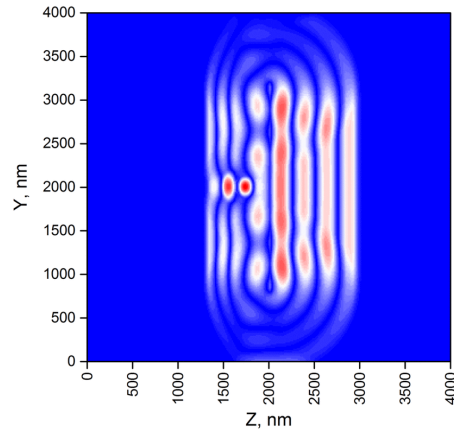
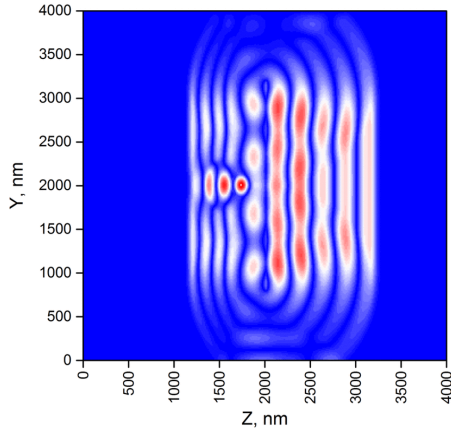
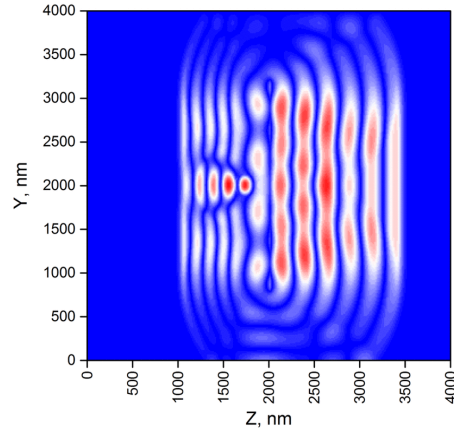


Рис. 6: $t = 1 \cdot T$

Рис. 7: $t = 1.5 \cdot T$ Рис. 8: $t = 2 \cdot T$ Рис. 9: $t = 2.5 \cdot T$ Рис. 10: $t = 3 \cdot T$

5.2 Эффективность параллельных вычислений

Моделирование методом конечных временных разностей во временной области может быть эффективно выполнено на многопроцессорном кластере. Обычно такое моделирование требует большой вычислительной мощности и большого объема оперативной памяти.

Из закон Амдала: $S_p = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$, где S_p - ускорение, p - число узлов, α - доля последовательной части следует, что $1 - \alpha = 99.5\%$

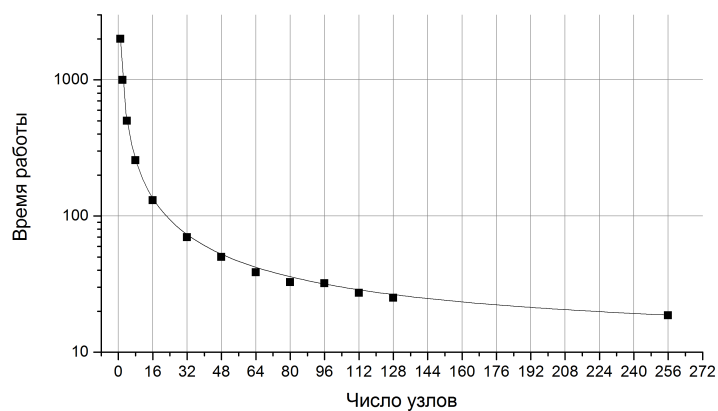


Рис. 11: Зависимость ускорения работы относительно последовательной программы от числа узлов.

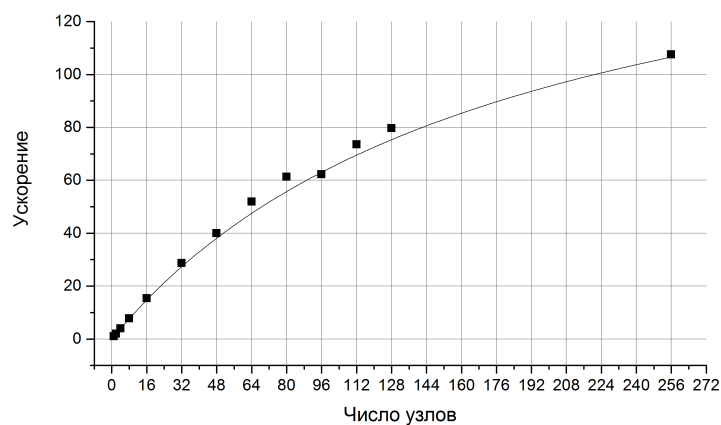


Рис. 12: Зависимость времени работы от числа узлов.

6 Итоги

В ходе работы произведен обзор метода конечных разностей во временной области и алгоритма Йи. Произведены его адаптация и запуск на многопроцессорном суперкомпьютере "Ломоносов" с использованием технологии MPI. Рассчитана задача с диэлектриками в электромагнитном поле. Анализ времени расчета системы на разном количестве узлов показал высокую эффективность использования параллельных вычислений - 99.5%

Список литературы

- [1] В. А. Алешкевич Электричество и магнетизм, Физматлит, 2015.
- [2] Kintechlab, FDTD, <http://fdtd.kintechlab.com/ru/fdtd>.
- [3] Wikipedia, Finite-difference time-domain method,
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite-difference_time-domain_method.
- [4] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В.
Практика суперкомпьютера Ломоносов, Открытые системы, N 7,
2012. С. 36-39.