

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова»

Физический факультет

Численное моделирование дифракции эл-маг волн
методами Finite Difference Time Domain

Курсовая работа студента 215 группы
Камалетдинов Сергей Раильевич

Москва
2019 г.

Содержание

1	Аннотация	2
2	Постановка задачи:	2
3	Физическая постановка, основные уравнения:	2
4	Описание численных методов	2
5	Генерация волны	4
6	Краткое описание кода, распараллеливание методами MPI	4
7	Физический результат	4
8	Ускорение	5
9	Вывод	5

1 Аннотация

Макроскопическая электродинамика полностью описывается уравнениями Максвелла, если в начальный момент задать в системе все токи и заряды, а так же вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0)$, то уравнение Максвелла позволяют узнать всю дальнейшую эволюцию и пространственное распределение поля (\mathbf{E}, \mathbf{H}) . Однако фактически аналитическое решение удаётся получить лишь в относительно простых случаях (при наличии цилиндрической, сферической симметрий). Выходом из этой ситуации видится использование численных методов.

2 Постановка задачи:

Метод численного решения задач Максвелловской электродинамики предложен Кейном Йи в 1966 году. Позднее он получил название: "Finite Difference Time Domain" или сокращено FDTD. В данной работе методом FDTD будет исследоваться дифракция электромагнитных волн на различных объектах. Методы FDTD позволяют решать широкий набор задач электродинамики, так как опираются исключительно на уравнения Максвелла. В данной работе токи генерируют электромагнитную волну, которая в последствии дифрагирует на объектах различной формы. Результаты представлены в виде графиков "снимков" поля при различных параметрах задачи в различные моменты времени.

3 Физическая постановка, основные уравнения:

Эволюцию электромагнитного поля в среде определяют уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{free} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \end{cases}$$

Где $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ - вектор электрической индукции, $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ - вектор магнитной индукции, а ε, μ - относительная электрическая и магнитная проницаемость соответственно. Мы будем рассматривать пустую область пространства с помещённым в неё диэлектрическим ($\mu = 1$) объектом дифракции, то есть

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{вне диэлектрика} \\ \alpha = 1000, & \text{внутри диэлектрика} \end{cases}$$

Свободные заряды отсутствуют $\rho_{free} = 0$, переменный ток $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z, t)$ - будем считать заданным источником электромагнитных волн. Так что исходной будет система уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \partial_t \mathbf{D} \end{cases}$$

Где ток $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z, t)$ считается заданным внешним параметром. Пространственное распределение $\varepsilon(\mathbf{r})$ определяет "форму" нашего тела. Целью является получение пространственно-временной эволюции электромагнитного поля, считая что в момент $t = 0$ оно отсутствовало.

4 Описание численных методов

Из уравнений Максвелла в задаче нам потребуются лишь два роторных уравнения, закон Фарадея и Ампера-Максвелла. Перепишем их в следующем эквивалентном виде

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \partial_t \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J} \end{cases}$$

То-есть электрическое и магнитное поле в следующий момент времени определены через пространственное распределение магнитного и электрического поля в данный момент времени. Задача рассматривалась в квадратной области N^3 . Для использования алгоритма Йи, перепишем уравнения в конечной форме, например уравнение на H_x и E_z выглядят следующим образом

Для E_z

$$E[t+2][x+2][y+2][z+1] = E[t][x+2][y+2][z+1] + \frac{c^2 \mu_0 \Delta t}{\varepsilon[x+2][y+2][z+1] \Delta l} (H[t+1][x+2][y+1][z+1] - H[t+1][x+2][y+3][z+1] + H[t+1][x+1][y+2][z+1] - H[t+1][x+1][y+2][z+1] - j_z[t+2][x+2][y+2][z+1])$$

И для H_x

$$H[t+2][x+1][y+1][z+2] = H[t][x+1][y+1][z+2] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta l} (-E[t+1][x+1][y][z+2] + E[t+1][x+1][y+2][z+2] - E[t+1][n_1+2][n_2+1][n_3+2] + E[t+1][x][y+1][z+2])$$

Индексы x, y, z в формулах не ставились, так как в данной точке пространства "находиться" лишь одна компонента поля E, B . Расположение компонент в схеме Йи показана на рисунке:

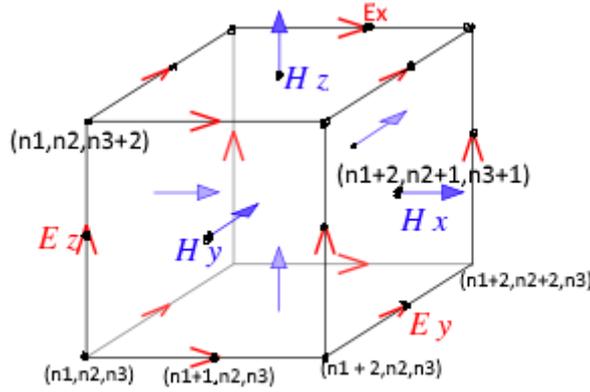


Рис. 1: Расположение компонент поля в схеме Йи. В каждой точке находится лишь одна из компонент.

То-есть данная компонента (например H_x) вычисляется через один узел (шаг 2), а компоненты E и H находятся в соседних узлах. К тому же E, H вычисляются со сдвигом по времени в $\Delta t = 1$ (конкретно в данной работе H вычислялся в четные моменты времени, а E в нечетные).

5 Генерация волны

Возникает вопрос о создании поля в нашей области, решить его можно двумя различными способами

- 1) Задавать ненулевое поле в области изначально
- 2) Располагать в области источник поля(например ток)

Мы выбрали второй способ. Для этого в центре области (в точке $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, z)$) задавался ток J_z , который плавно выходил из нулевого начального значения и генерировал эл-маг поле. В задаче использовался постоянный и переменный ток, для получения использовалась следующая аналитическая зависимость:

Постоянный ток:

$$J_z = J_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{100}\right) \right)$$

Переменный ток:

$$J_z = J_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{100}\right) \exp\left(-\frac{(t-50)^2}{900}\right)$$

В первом случае рассматривался стационарный режим $t > 100$, во втором исследовалась эволюция поля при $t \in [50, 400]$. Параметры дискретизации по пространству и времени были выбраны как $\mathbf{dl} = 2 * 10^{-3}$ м и $\mathbf{dT} = 2 * 10^{-12}$ с

6 Краткое описание кода, распараллеливание методами MPI

Краткая структура кода выглядит так, в начале задаются константы отвечающие за размер области и интересующий интервал по времени. Результаты получали на кубических областях $N \times N \times N$. Все поле E, H хранится в одном массиве (четырёхмерном) $ARR[n_0][n_1][n_2][n_3]$ где $0 \leq n_0 < 4$ и представляет собой поле в два различных момента времени(по два на E и H), а $[n_1][n_2][n_3]$ представляет собой набор координат точек пространства.

Изначально предполагалось задавать отдельный массив для E и H , это значительно упрощает код для восприятия и уменьшает вероятность ошибок, однако от этого варианта отказались по следующим причинам:

- 1) Процессорам пришлось бы обмениваться двумя различным массивами
- 2) Координаты ячеек в массивах пришлось бы сложным образом согласовывать друг с другом, а это многократно увеличивает вероятность ошибки
- 3) Если же считать координаты в массиве совпадающими с реальными пространственными, то массив содержал бы большое количество пустых ячеек, так как E и H вычисляются через 2 точки.

Так что в результате было решено хранить все компоненты E, H в одном общем массиве. Далее процессоры распределяют между собой область по оси OZ , то-есть каждый процессор получает "Слой" $N \times N \times L$ где L - толщина слоя. В памяти сохраняется значение поля в 2 соседних момента времени.

На основании алгоритма Йи считается поля E, H в точках выделенного слоя, для получения поля на границах выделенного слоя после завершения счета процессор обменивается с соседями сверху и снизу своими 3 граничными слоями(именно столько надо для подсчета rot на границе). На выходе имеем численное значение поля в интересующей нас области(обычно брали в сечении XY).

7 Физический результат

Методом FDTD удалось получить:

- 1) Поле стационарного тока.
- 2) Получить электромагнитную волну от импульса тока.
- 3) Промоделировать дифракцию цилиндрической электромагнитной волны на Кубике, Клине и Щели.

Полученные данные выглядят физически осмысленными, так например при дифракции на щели хорошо видно, что щель становится источником вторичной цилиндрической волны, как это и предсказывается принципом Гюйгенса-Френеля.

Понятно так же и распространение волны H_x , порожденной импульсом тока, в свободном пространстве. Сравнивая эту картину с картиной поля H_x для стационарного тока, видно что волна представляет собой картину поля для стационарного тока которая распространяется вдоль оси OY с постепенно расширяющимся волновым фронтом и уменьшающийся амплитудой.

Что касается поля стационарно тока, то результат так же выглядит осмысленным, так как напоминает промодулированный $\cos^2(\varphi)$ в плоскости XU , как это и предсказывает аналитическое решение уравнения Максвелла для стационарного тока. Некоторые отклонения от этой теоретической картины объясняются конечностью времени генерации тока.

При дифракции на клине хорошо видно как волна отразилась от его острия и движется в обратном направлении к центру системы.

На последнем рисунке представлена дифракция поля E_z на полуплоскости. Хорошо видно проникновения излучения в область геометрической тени, а также отражённая от угла плоскости волна.

8 Ускорение

Результаты по ускорению программы неоднозначны. С одной стороны, по измерениям последовательная программа требует на выполнения больше часа, а тот же код на 50 процессорах выполняется всего за 29 секунд. Так что для получения какого-либо результата в осмысленный срок необходима параллельность, с этой задачей удалось справиться.

С другой стороны при изменении числа процессоров с 10 до 80 наблюдается ускорения всего лишь в 3 раза, что является крайне низким показателем. Причина этого видимо связана с поэлементной записью при обмене данными между процессорами, но поправить ситуацию не удалось.

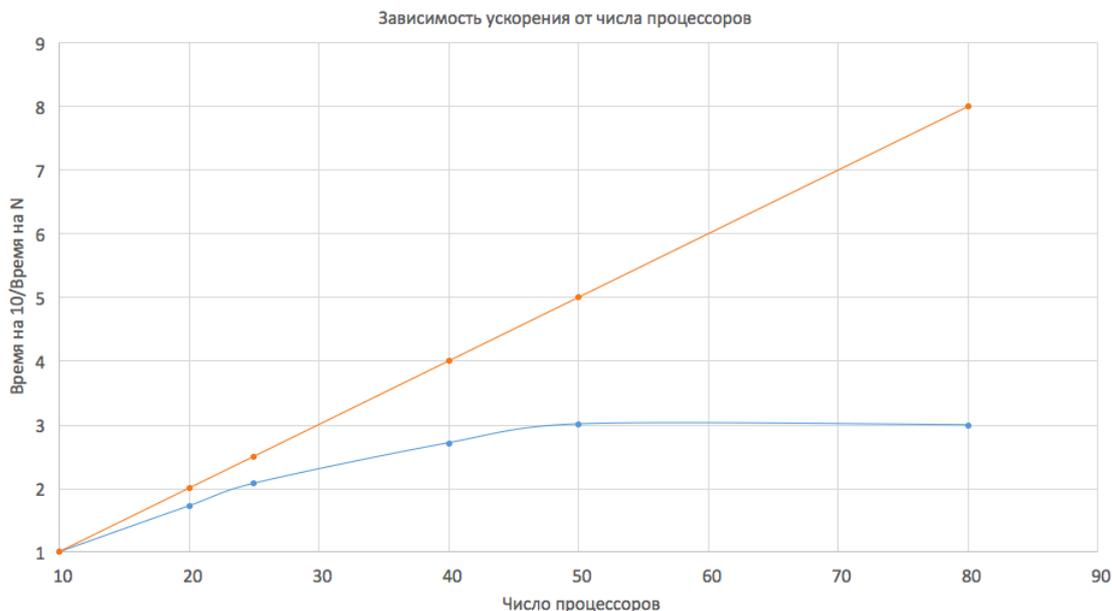


Рис. 2: Ускорение относительно 10 процессоров, время выполнения последовательной программы > 60 мин, время на 50 процессорах 29 секунд

9 Вывод

В результате выполнения работы был освоен метод численного моделирование эл-маг волн с помощью Finite Difference Time Domain. Данным методом была исследована дифракция эл-маг волн на различных объектах, в качестве отчёта предоставлена пространственно -временная эволюция поля при дифракции. Результаты выглядят физически осмысленными.

Код был распараллелен с помощью MPI, это позволяет получать результаты на больших областях за меньшее время. Но при увеличении числа процессоров с 10 до 80 наблюдается ускорение лишь в 3 раза. Исправить это не удалось.

Список литературы

- [1] Домбровская Ж.О. - "Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред"
- [2] А. А. Скубаческий, Н. И. Хохлов - "Численное решение уравнений Максвелла для моделирования распространения электромагнитных волн"
- [3] А. А. Шарапова, Д. С. Кулябов - "Моделирование распространения электромагнитных волн методом конечных разностей с помощью openEMS"
- [4] Андрей Григорьев - "Методы вычислительной электродинамики"
- [5] И.Е.Мигалёв - "ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ"
- [6] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов" // Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы N 7, 2012. С. 36-39

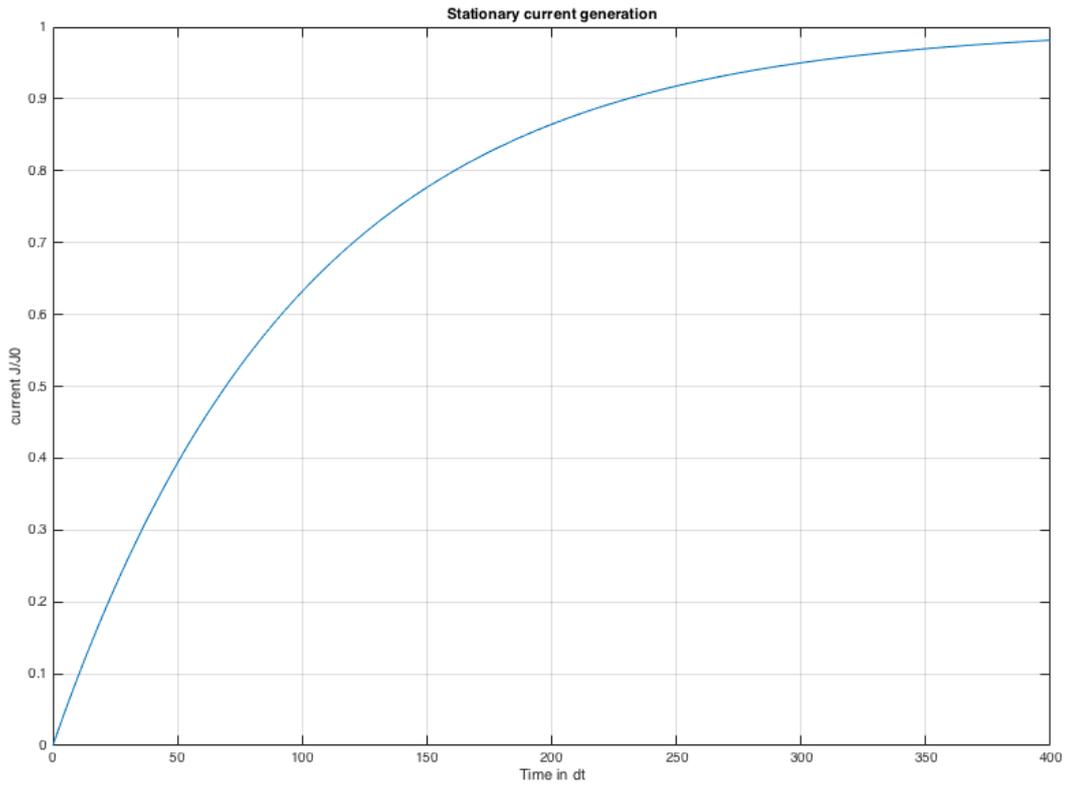


Рис. 3: Генерация тока, выходящего на постоянное значение из нуля.

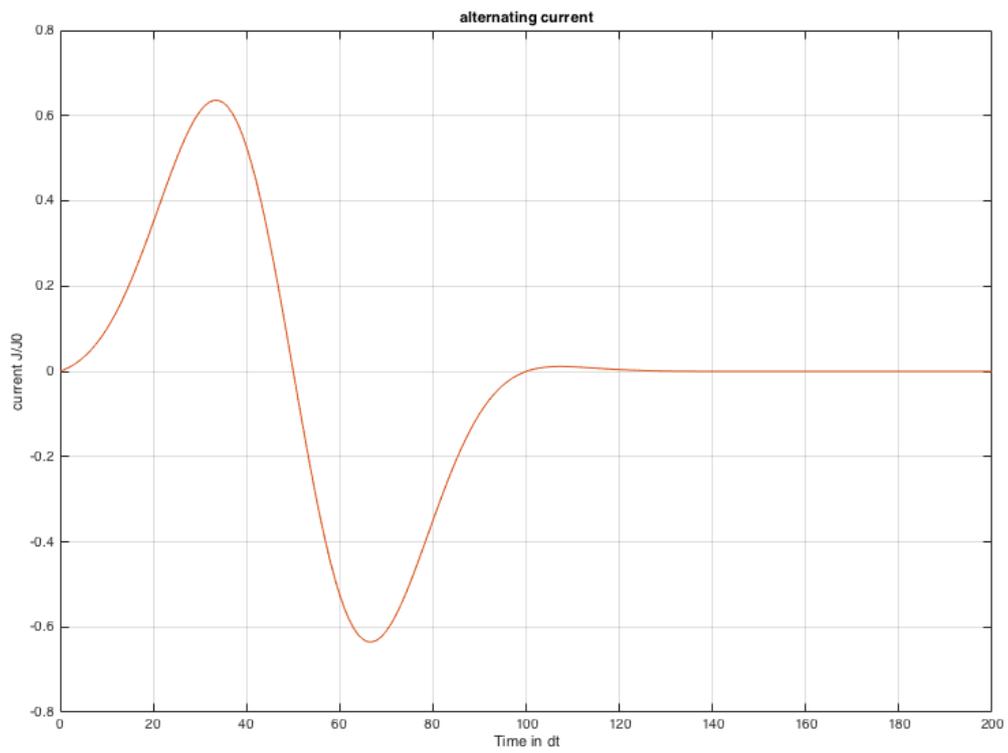


Рис. 4: Ток, порождающий эл-маг волну и затухающий на больших временах t .

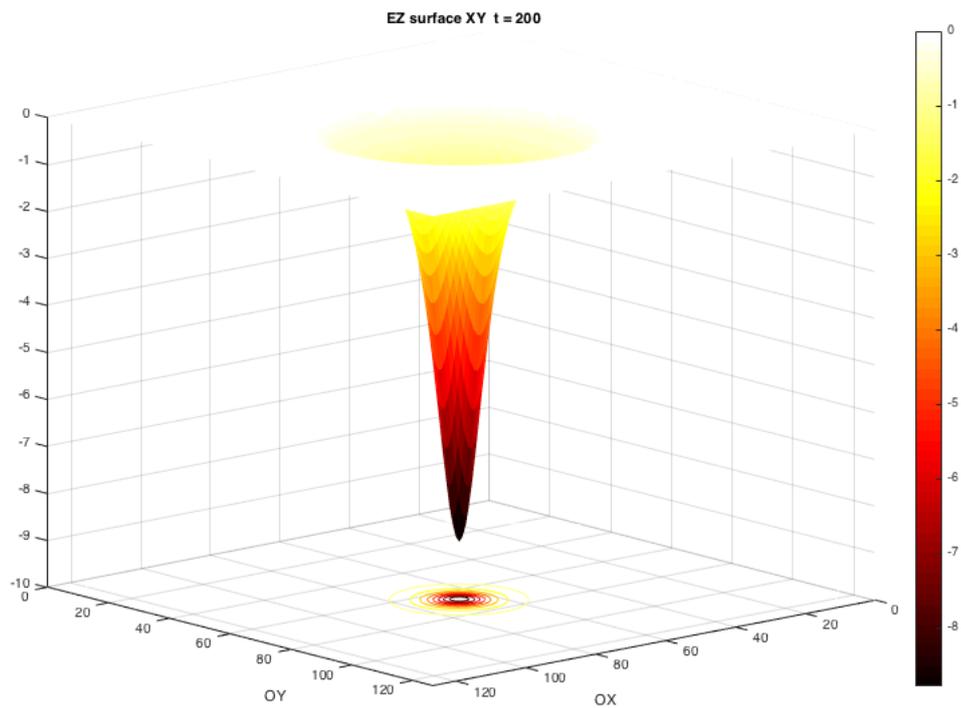


Рис. 5: Поле $|E_z|$ ток выходящий на стационарное значение .

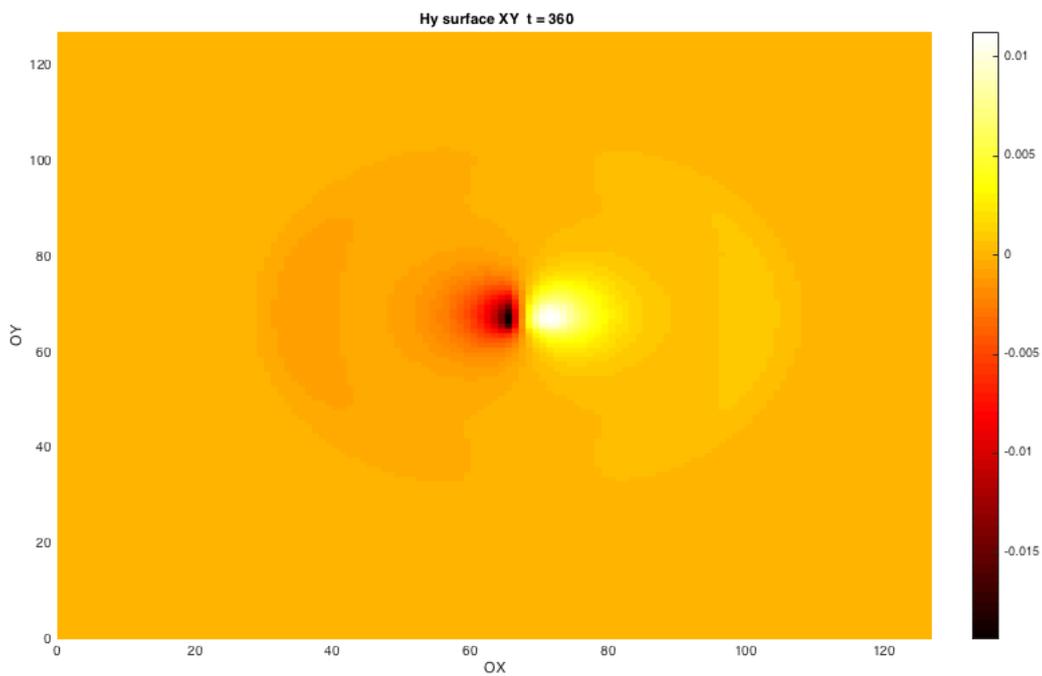


Рис. 6: Поле $|H_y|$ стационарного тока вдоль OZ .

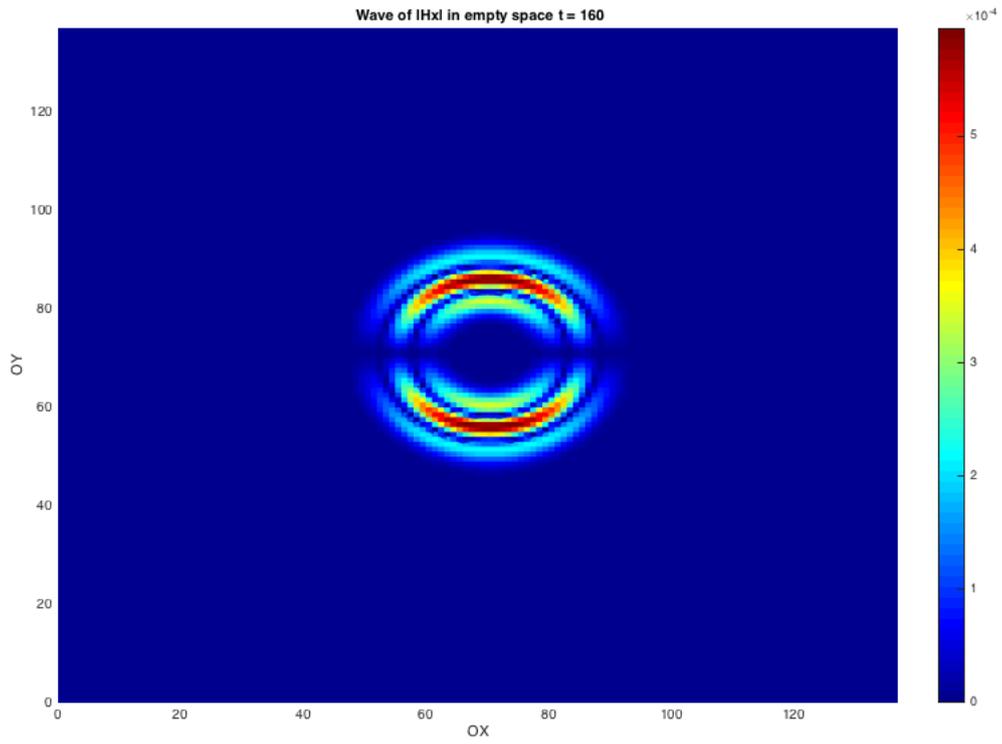


Рис. 7: Поле $|H_x|$ в момент времени $t = 160$.

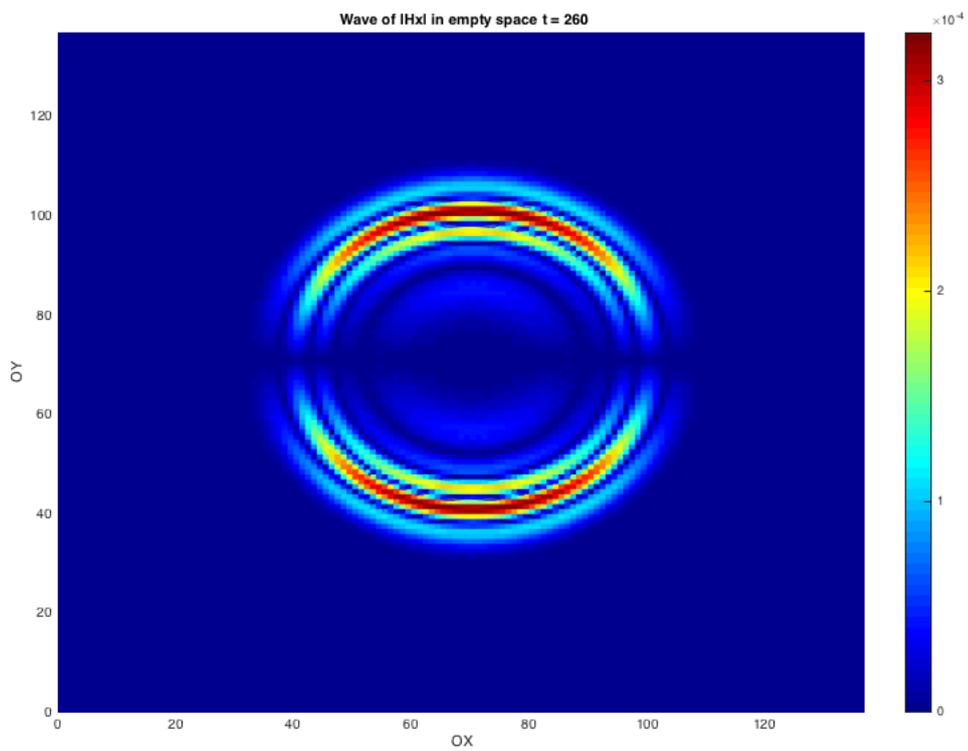


Рис. 8: Поле $|H_x|$ в момент времени $t = 260$.

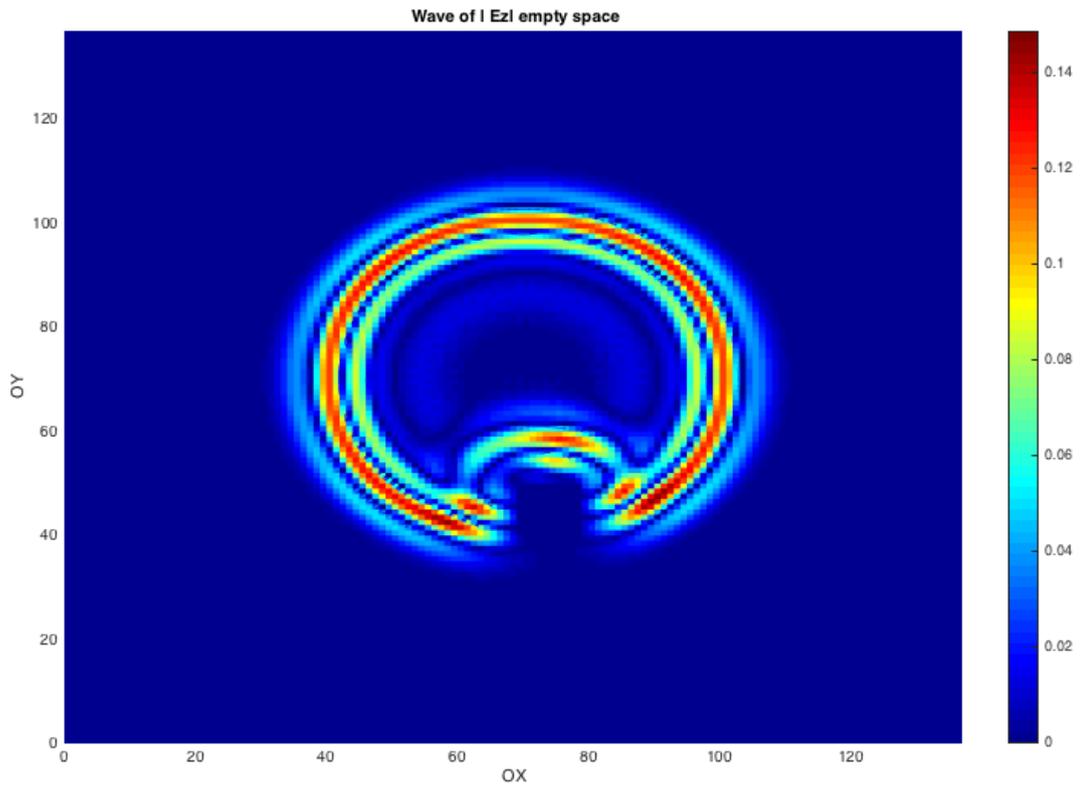


Рис. 9: Поле $|E_z|$ дифрагирует на кубике .

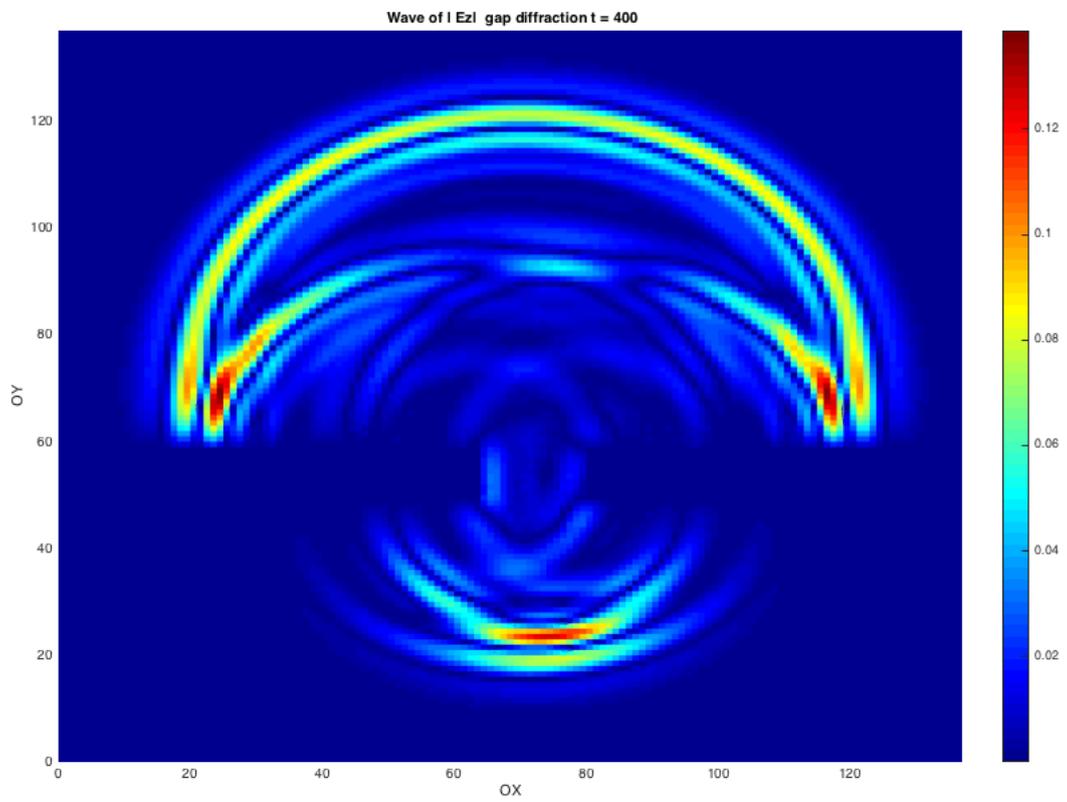


Рис. 10: Поле $|E_z|$ дифрагирует на щели $t = 400$.

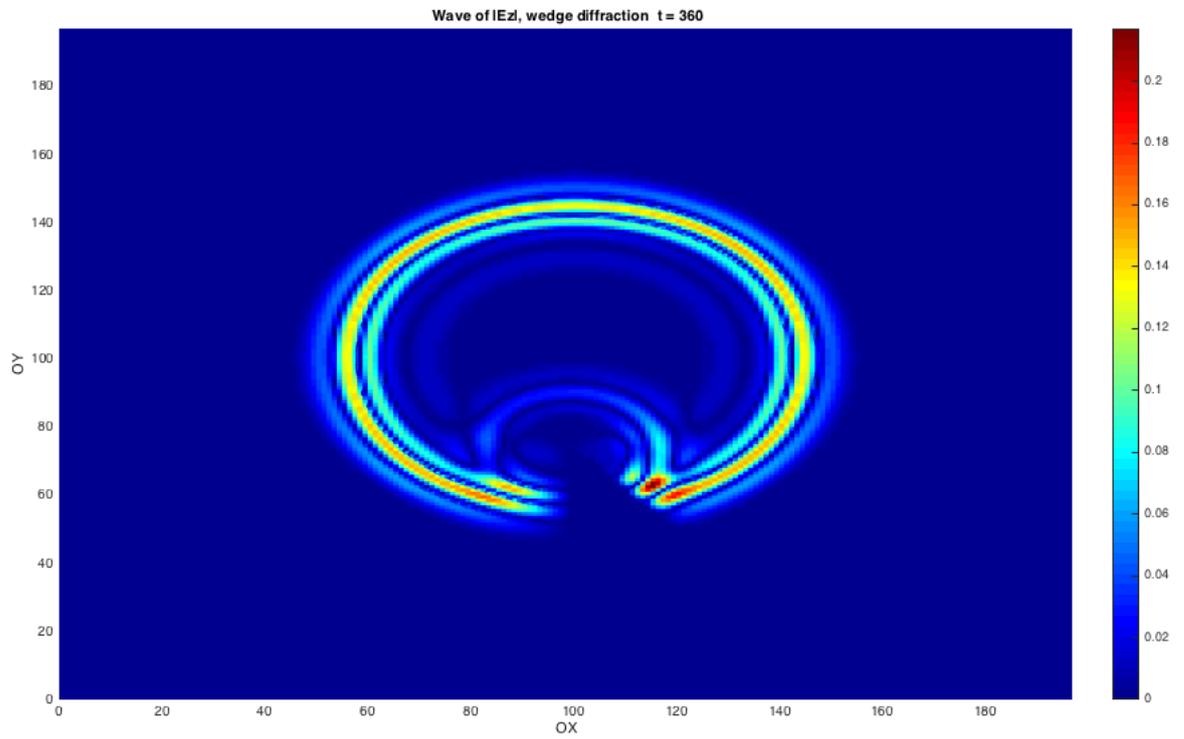


Рис. 11: Поле $|E_z|$ дифрагирует клине .

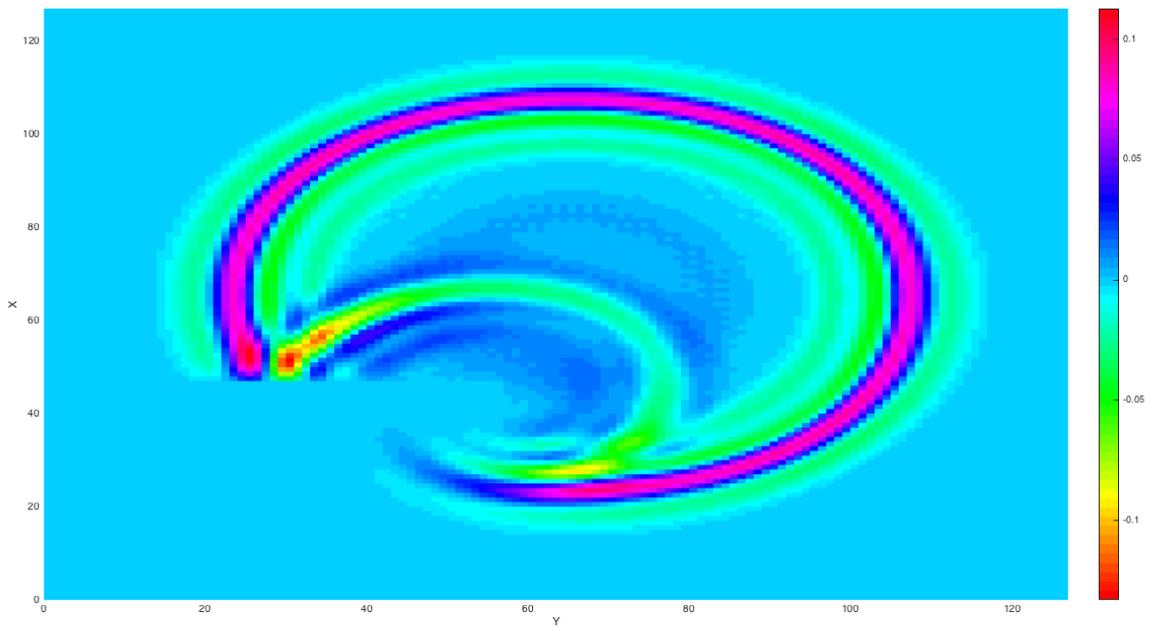


Рис. 12: Дифракция E_z на полуплоскости, хорошо видно проникновения излучения в область геометрической тени , а также отражённая от угла плоскости волна.