

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

**«Высокопроизводительное моделирование коллективных
осцилляций астрофизических нейтрино»**

Курсовая работа студента 2-ого курса
Гладченко Сергея Евгеньевича
208 группы

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. ассистент каф. теоретической физики
О.Г. Харланов

Москва 2019

1 Введение

1.1 Основные положения

В данной работе будет рассмотрено такое физическое явление как *осцилляции* нейтрино — процесс, в ходе которого данные частицы могут с некоторой вероятностью менять свою основную характеристику, называемую *ароматом* или *флейвором*, которых, как утверждает Стандартная модель, всего три: *электронный*, *мюонный* и *тау*- флейворы. Нейтрино взаимодействуют по каналу слабого взаимодействия с обычным веществом и также по слабому каналу друг с другом.

К данному физическому явлению с каждым годом проявляется всё больший интерес, поскольку именно от нейтрино мы можем получать различную информацию от очень удалённых объектов, таких как взрывы сверхновых, где рождается порядка $10^{56} - 10^{57}$ нейтрино в секунду. Важно то, что данные частицы почти не взаимодействуют с материей и на ней, в общем-то, практически не рассеиваются — происходит лишь так называемое *рассеяние вперёд*, в ходе которого у соответствующей волновой функции набегает фаза, подобно тому, как набегает фаза у электромагнитных волн, при их попадании в прозрачные среды, например, в стекло. Именно этот набег фазы, как оказывается, и отвечает за поворот вектора состояния нейтрино в флейворном пространстве, что и приводит к изменению аромата нейтрино.

Как уже было сказано, данные частицы легко проходят сквозь материю. Имеющиеся на сегодня *нейтринные детекторы* и те, что будут построены в течение ближайших 10 лет, позволят изучать процессы, протекающие глубоко в сверхновой, откуда свет, регистрируемый в обычных телескопах, выйти не может. Именно поэтому огромный интерес представляет изучение того, как именно происходят осцилляции флейворов; появилась необходимость предсказывать флейворный состав тех нейтрино, что мы можем регистрировать от таких объектов. Сам же эффект осцилляций нейтрино оказывается настолько важным, что его наличие однозначно доказывает существование у нейтрино массы. В 2015 году за первые экспериментальные доказательства наличия осцилляций была вручена Нобелевская премия.

Как уже было сказано ранее, набег фазы у волновой функции состояния существенно определяется рассеянием вперёд нейтрино на материи и на других нейтрино. Режим, когда существенный (или даже подавляющий) вклад вносит последний из перечисленных факторов, называется *коллективными* осцилляциями. Такой режим достигается непосредственно у поверхности *нейтриносферы* сверхновой (поверхности последнего рассеяния нейтрино) где плотности самих нейтрино достигают колоссальных величин порядка $10^{28} - 10^{30} \text{ cm}^{-3}$. Коллективные осцилляции подчиняются достаточно простым дифференциальным уравнениям, которые в ряде случаев интегрируются аналитически. Однако коллективные же осцилляции описываются куда более сложными нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, которые не могут быть решены аналитически вовсе. Данная работа посвящена численным решениям подобных уравнений и анализу данных решений.

Важно, что в имеющихся уравнениях есть существенные неустойчивости, которые и представляют колоссальный интерес, поскольку именно эти неустойчивости становятся ключевым механизмом, определяющим флейворные превращения нейтрино сверхновых.

1.2 Описание модели

Рассмотрение коллективных осцилляций в данной работе будет произведено в рамках так называемой *модели нейтринной линии* (Neutrino Line Model, NLM) — планарная модель, в которой анализируются осцилляции при рассеении двух потоков нейтрино друг на друге, сталкивающихся под некоторым фиксированным углом. Такая модель качественно правильно описывает реальные процессы, происходящие во взрывах сверхновых, просто в реальности пучков существенно больше, чем два, задача уже не планарная, а трёхмерная, и излучение самих нейтрино происходит не с плоской поверхности, а со сферы. Тем не менее для поиска тех же неустойчивостей исследуемая модель вполне пригодна.

Впредь будем под координатой z понимать расстояние, отсчитываемое от плоской поверхности «нейтриносферы» $z = 0$, а под x будем понимать координату, отсчитываемую вдоль самой нейтриносферы — введение продольной координаты позволит нам рассмотреть неоднородности в светимости сверхновой, которые и могут потенциально вызвать какие-то неустойчивости.

Математически осцилляции мы будем описывать с помощью квантового уравнения Лиувилля, причём будем искать именно стационарные решения, т.е. решения, не зависящие от времени:

$$\begin{aligned} i\hbar c (\vec{v}_\zeta, \vec{\nabla}) \rho_E^\zeta(x, z) &= [H_0(E) + H_{\nu\nu}^\zeta(x, z), \rho_E^\zeta(x, z)], \\ i\hbar c (\vec{v}_\zeta, \vec{\nabla}) \bar{\rho}_E^\zeta(x, z) &= [-H_0(E) + H_{\nu\nu}^\zeta(x, z), \bar{\rho}_E^\zeta(x, z)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho_E^\zeta(x, z), \bar{\rho}_E^\zeta(x, z) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ обозначают нормированные (с единичным следом) матрицы плотности, соответствующие одному из потоков $\zeta = \pm 1$ нейтрино и антинейтрино соответственно в точке (x, z) при некоторой энергии E . Под остальными обозначениями понимаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} H_0(E) &= \eta \times \frac{\Delta m^2}{4E} (-\cos 2\theta \tau_3 + \sin 2\theta \tau_1), \\ H_{\nu\nu}^\zeta(x, z) &= \mu(x + \zeta z \tan \omega) \int_{\mathbb{R}} dE' \left(\Phi(E') \rho_{E'}^\zeta(x, z) - \bar{\Phi}(E') \bar{\rho}_{E'}^\zeta(x, z) \right), \\ \mu(x) &= G_F \sqrt{2} \hbar^3 c^3 n_\nu(x) (1 - \cos 2\omega), \end{aligned} \quad (2)$$

H_0 обозначает ту часть гамильтониана, в которой описываются неколлективные осцилляции, $H_{\nu\nu}$ — часть гамильтониана, ответственная за коллективный фактор. Под n_ν понимается суммарная светимость нейтрино и антинейтрино на нейтриносфере в точке с координатой x .

В качестве разности квадратов массовых состояний возьмём значение $\Delta m^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, действуя в двухфлейворном приближении, с углом смешивания $\theta = 9^\circ$, в соответствии с экспериментальными данными, описанными в [3]. Под матрицами τ_1 и τ_3 понимаются соответствующие матрицы Паули, а η обозначет тип иерархии массовых состояний ($\eta = \pm 1$). Нейтрино, естественно, предполагаются ультрарелятивистскими, т.е. скорости нейтрино в пучках $|\vec{v}_\zeta| = 1$ и $(\vec{v}_\zeta) = (\zeta \sin \omega, \cos \omega)$, где ω – угол каждого из пучков к нормали. Как правило, если не оговорено иное, будем брать $\omega = 30^\circ$.

Функции $\Phi(E)$ и $\bar{\Phi}(E)$ обозначают спектральные распределения нейтрино и антинейтрино соответственно, таким образом, в данном анализе мы сможем учесть то, что нейтрино, рождающиеся в сверхновых, являются существенно немонахроматическими. Поскольку в наших предположениях нейтрино дираковские, $\Phi(E)$ и $\bar{\Phi}(E)$ в процессе эволюции не изменяются, поскольку возможны лишь превращения $f \rightarrow f'$, $\bar{f} \rightarrow \bar{f}'$, т.е. суммарное число нейтрино и антинейтрино по отдельности сохраняется. Сами же $\Phi(E)$ и $\bar{\Phi}(E)$ складываются из распределений каждого флейвора в отдельности, каждый из которых зависит от z , но суммарно $\Phi(E)$ и $\bar{\Phi}(E)$ остаются постоянными для каждой энергии, т.е.

$$\Phi(E) = \sum_{f=e,x} \Phi_f(E), \quad \bar{\Phi}(E) = \sum_{\bar{f}=\bar{e},\bar{x}} \bar{\Phi}_{\bar{f}}(E). \quad (3)$$

2 Постановка задачи

2.1 Численная схема

В данной работе уравнение (1) мы будем решать со следующими начальными и граничными условиями:

1. Зафиксируем решение на самой нейтриносфере, формально указывая состав тех нейтрино, которые испускаются сверхновой

$$\rho_E^\zeta(x, 0) = \frac{1}{\Phi(E)} \begin{pmatrix} \Phi_e(E) & 0 \\ 0 & \Phi_x(E) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\bar{\rho}_E^\zeta(x, 0) = \frac{1}{\bar{\Phi}(E)} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_e(E) & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}_x(E) \end{pmatrix} \quad (5)$$

2. В дальнейшем мы будем решать наше уравнение при $x \in [0; L]$. Чтобы избежать различных краевых эффектов, гладким образом замкнём наше решение по оси x :

$$\rho_E^\zeta(x, z) = \rho_E^\zeta(x + L, z) \quad (6)$$

$$\bar{\rho}_E^\zeta(x, z) = \bar{\rho}_E^\zeta(x + L, z) \quad (7)$$

Тогда ясно, что с такими требованиями удобнее всего решать задачу *методом линий* (Line method).

Поскольку мы знаем начальные условия на целой *линии* $z = 0$ и уравнение (1) разрешается относительно частной производной по z , мы можем для каждого $x \in [0; L]$ и для каждой $E \in [E_{\min}; E_{\max}]$ конечно-разностными методами посчитать значение матрицы плотности в точке z , ближайшей к начальной. Далее можно этот алгоритм производить до тех пор, пока мы не найдём всё решение на $z \in [0; z_{\max}]$, двигаясь последовательно по сегменту z , на каждом шаге вычисляя решения при всех значениях переменных x и E .

Для наглядности рассмотрим разрешённое относительно нужной частной производной уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \rho_E^\zeta(x, z) &= F_E^\zeta(x, z, \rho(z), \bar{\rho}(z)) = \\ &= -\zeta \tan(\omega) \frac{\partial}{\partial x} \rho_E^\zeta(x, z) - \frac{i}{\hbar c \cos(\omega)} [H_E^\zeta(x, z, \rho(z), \bar{\rho}(z)), \rho_E^\zeta(x, z)], \end{aligned} \quad (8)$$

и аналогичное для матрицы плотности антинейтрино

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho}_E^\zeta(x, z) &= \bar{F}_E^\zeta(x, z, \rho(z), \bar{\rho}(z)) = \\ &= -\zeta \tan(\omega) \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}_E^\zeta(x, z) - \frac{i}{\hbar c \cos(\omega)} [\bar{H}_E^\zeta(x, z, \rho(z), \bar{\rho}(z)), \bar{\rho}_E^\zeta(x, z)], \end{aligned} \quad (9)$$

где под $\rho(z), \bar{\rho}(z)$ понимаются значения соответствующих функций при всех x, E и ζ при данном z . В качестве схемы решения выберем схему Эйлера, тогда соответствующая конечно-разностная формула, очевидно, имеет следующий вид: $\forall x_i, E_k, \zeta = \pm 1$

$$\begin{aligned} \rho_{E_k}^\zeta(x_i, z_{n+1}) &= \rho_{E_k}^\zeta(x_i, z_n) + F_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) \Delta z, \\ \bar{\rho}_{E_k}^\zeta(x_i, z_{n+1}) &= \bar{\rho}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n) + \bar{F}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) \Delta z, \end{aligned} \quad (10)$$

где выражения для производных имеют вид

$$\begin{aligned} F_{E_k}^\zeta(x_i, z_n) &= -\zeta \tan(\omega) \frac{1}{2\Delta x} (\rho_{E_k}^\zeta(x_{i+1}, z_n) - \rho_{E_k}^\zeta(x_{i-1}, z_n)) - \\ &\quad - \frac{i}{\hbar c \cos(\omega)} [H_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)), \rho_{E_k}^\zeta(x_i, z_n)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n) &= -\zeta \tan(\omega) \frac{1}{2\Delta x} (\bar{\rho}_{E_k}^\zeta(x_{i+1}, z_n) - \bar{\rho}_{E_k}^\zeta(x_{i-1}, z_n)) - \\ &\quad - \frac{i}{\hbar c \cos(\omega)} [\bar{H}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)), \bar{\rho}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n)], \end{aligned} \quad (12)$$

и сами гамильтонианы для нейтрино и антинейтрино

$$\begin{aligned} H_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) &= H_0(E_k) + H_{\nu\nu}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) \\ \bar{H}_{E_k}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) &= -H_0(E_k) + H_{\nu\nu}^\zeta(x_i, z_n, \rho(z_n), \bar{\rho}(z_n)) \end{aligned} \quad (13)$$

Коллективная часть в этих гамильтонианах определяется следующей формулой:

$$H_{\nu\nu}^{\zeta}(x_i, \dots) = \mu(x_i + \zeta z_n \tan(\omega)) \sum_{k'=0}^{N_E-1} \left(\Phi(E_{k'}) \rho_{E_{k'}}^{-\zeta}(x_i, z_n) - \bar{\Phi}(E_{k'}) \bar{\rho}_{E_{k'}}^{-\zeta}(x_i, z_n) \right) \Delta E \quad (14)$$

Под x_i, E_k, z_n понимаются, естественно, точки соответствующих координатных сеток, а под переменными $\Delta x, \Delta E, \Delta z$ понимаются шаги этих сеток; в дальнейшем также под N_x, N_z, N_E будут пониматься числа точек сетках соответственно. Таким образом, анализируя выражения выше, в предложенной схеме фактически производная по x в каждой точке (x, z, E) заменяется её конечно-разностным выражением второго порядка, а интеграл заменяется на интегральную сумму по соответствующим точкам сетки E .

2.2 Реализация алгоритма

Ясно, что алгоритм получается существенно последовательным, однако на каждом шаге цикла по точкам сетки z производится множество однотипных операций вычисления новых значений матрицы плотности при всех $(x, E) \in [0; L] \times [E_{\min}; E_{\max}]$, причём такие вычисления не зависят друг от друга. Тогда, очевидно, можно распараллелить вычисление новых значений функций таким образом, что на каждом шаге различные узлы будут вычислять значения матриц плотности в выделенных для них участках $[x_{N_{\text{rank}}}; x_{N_{\text{rank}}+1}-1] \times [E_0; E_{N_E-1}]$.

Общение между узлами будет, очевидно, возникать только при вычислении конечно-разностных формул для частных производных по x , когда эти производные вычисляются в граничных точках области, выделенной для данного узла – тогда появляется необходимость в обмене этими значениями с левым и правым «соседом» каждого из узлов.

Именно поэтому для реализации численной схемы был выбран не алгоритм Рунге-Кутты, а именно схема Эйлера, поскольку в ней нужно производить всего одно вычисление производной, в то время как в схеме РК нужно производить таких 4 вычисления и в ходе этих вычислений пришлось бы обмениваться большим числом точек. Более того, для интересующих нас масштабов z точности метода Эйлера вполне достаточно.

Также, для сохранения устойчивости самой схемы, в конце каждого шага производится перенормировка матрицы плотности, поскольку эволюция предполагается унитарной, т.е. матрица плотности обязана сохранять след и эрмитовость:

$$\begin{aligned} \rho_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) &\mapsto \frac{1}{\text{tr}(\rho_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) + \rho_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n)^{\dagger})} \left(\rho_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) + \rho_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n)^{\dagger} \right) \\ \bar{\rho}_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) &\mapsto \frac{1}{\text{tr}(\bar{\rho}_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) + \bar{\rho}_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n)^{\dagger})} \left(\bar{\rho}_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n) + \bar{\rho}_{E_k}^{\zeta}(x_i, z_n)^{\dagger} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Что касается параллелизма, на каждом шаге цикла по z , как уже было сказано выше, различные узлы обсчитывают выделенные им точки $[x_{N_{\text{rank}}}; x_{N_{\text{rank}}+1}-1] \times [E_0; E_{N_E-1}]$ из всего прямоугольника $[x_0; x_{N_x-1}] \times [E_0; E_{N_E-1}]$.

Данный вид параллелизма реализован с помощью технологии MPI; это весьма удобно, поскольку с увеличением числа используемых узлов количество обменов, производимых ядрами в отдельности, фактически не растёт — разве что только на этапе коллективной сборки данных на мастер-узле, а каждый узел в процессе работы общается только с двумя своими соседями, при расчёте конечно-разностных формул для производных матрицы плотности. И как мы убедимся в дальнейшем, это действительно так, и ускорение остаётся линейным вплоть до больших чисел ядер, что крайне удобно. Также, как нетрудно видеть, фактически при данной реализации распараллелено вычисление новых значений матрицы плотности именно по оси x . На то есть две причины.

Во-первых, как правило, в условиях нашей задачи $N_x \approx 10^3 - 10^4$, а $N_E \approx 10^0 - 10^2$. По этой причине как минимум было бы невыгодно делить именно точки E_k между ядрами. Во-вторых, для каждого x_i необходимо вычисление интеграла по энергиям, согласно (2). Если бы узлы имели разные куски сетки по E , пришлось бы совершать много обменов со всеми узлами коммунитатора, чтобы посчитать очередной шаг алгоритма при заданном E_k , что, естественно, не выгодно, поскольку при использованном способе распараллеливания обмены нужны даже не при каждом x_i .

3 Результаты

3.1 Проверка схемы

Для начала стоит проверить получившуюся схему на предмет того, как она себя ведёт на известных решениях. Итак, для начала возьмём самый тривиальный случай, когда плотность $n_\nu(x) = 0$, т.е. фактически такой режим соответствует неколлективным осцилляциям, когда интегральный член в гамильтониане просто отсутствует. При этом рассмотрим случай, когда нейтрино существенно немонахроматические, а спектры для определённости возьмём такие, как на графиках ниже, параметры которых были получены численно [4]:

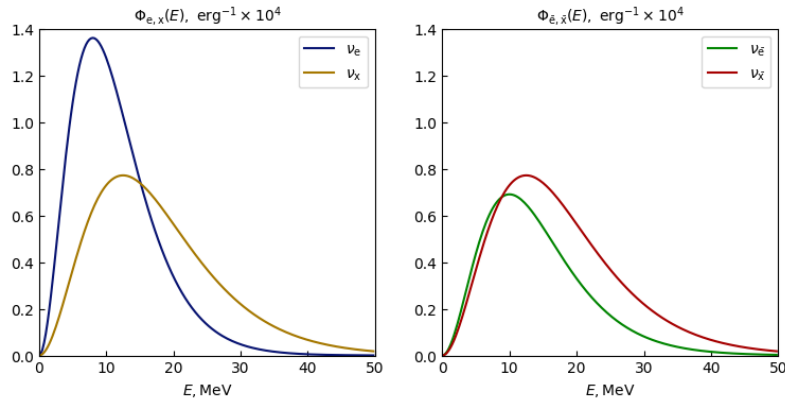


Рис. 1: Спектры нейтрино и антинейтрино, используемые в немонахроматическом режиме

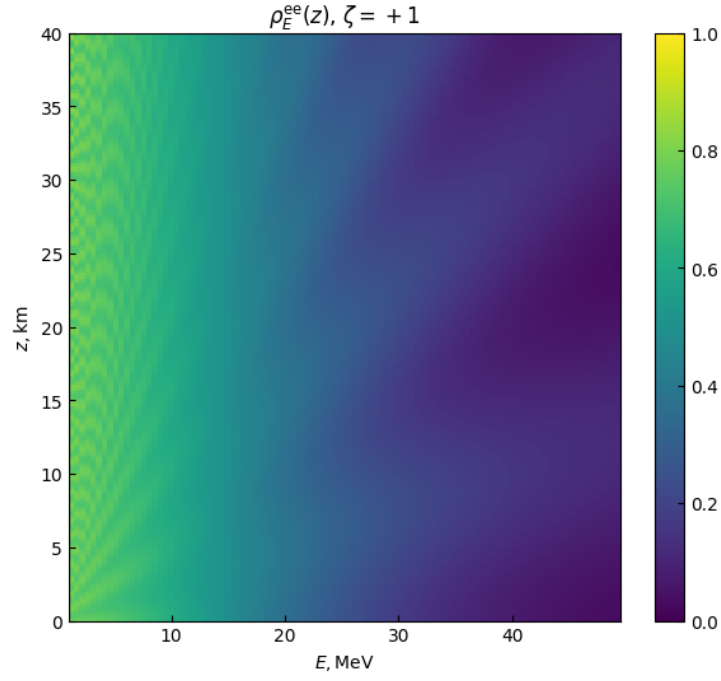


Рис. 2: Неколлективные осцилляции в немонохроматическом режиме

Что касается коллективного режима, возьмём однородную светимость нейтриносферы с плотностью $n_\nu(x) = 10^{28} \text{ см}^{-3}$ и такие же начальные спектры, что и в случае выше:

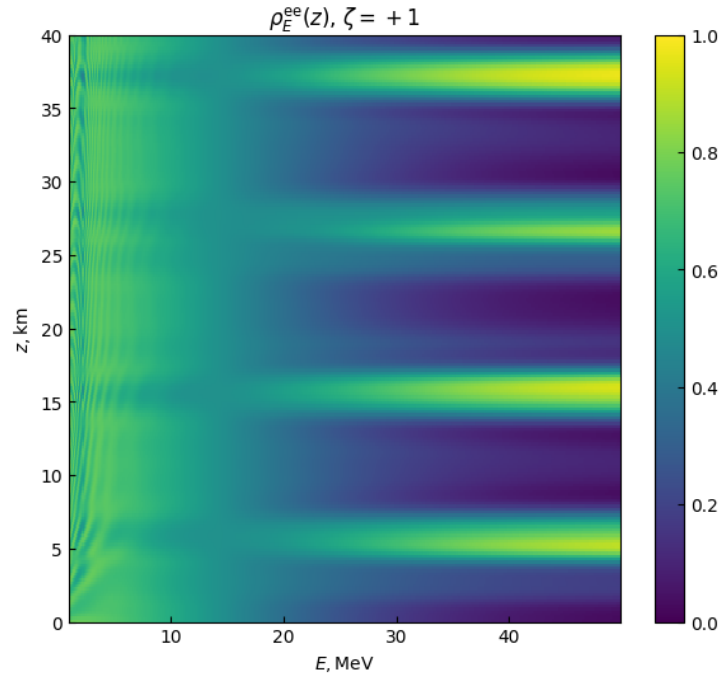


Рис. 3: Коллективные осцилляции в немонохроматическом режиме, однородная светимость

Для наглядности здесь отражены изменения элемента ρ^{ee} матрицы плотности, фактически равного условной вероятности обнаружения электронного флейвора в данной точке, для пучка с $\zeta = +1$. И в одном, и в другом случае результат оказывается корректным. В неколлективном режиме, как и должны, наблюдаются осцилляции, длина которые пропорциональна энергии E , в коллективном — в области больших энергий наблюдаются *синхронные* осцилляции. Уже на данных этапах заметно, насколько важную роль играют коллективные осцилляции, поскольку при малых углах смешивания θ их амплитуды существенно больше, по сравнению с неколлективным режимом.

3.2 Неустойчивости

Теперь сосредоточимся на том, что происходит при добавлении дополнительной степени свободы — координаты x . Дальнейший анализ произведём в монохроматическом режиме с $E = 10$ MeV и характерным значением $n_\nu = 10^{28} \text{ см}^{-3}$. Пусть сначала нейтриносфера светит однородно, т.е. n_ν не зависит от точки x . Тогда мы можем наблюдать вполне естественную для нас картину коллективных осцилляций, причём само решение, конечно же, тоже не зависит от x (поскольку и начальные условия, и функции, входящие в уравнение, не имеют данной зависимости):

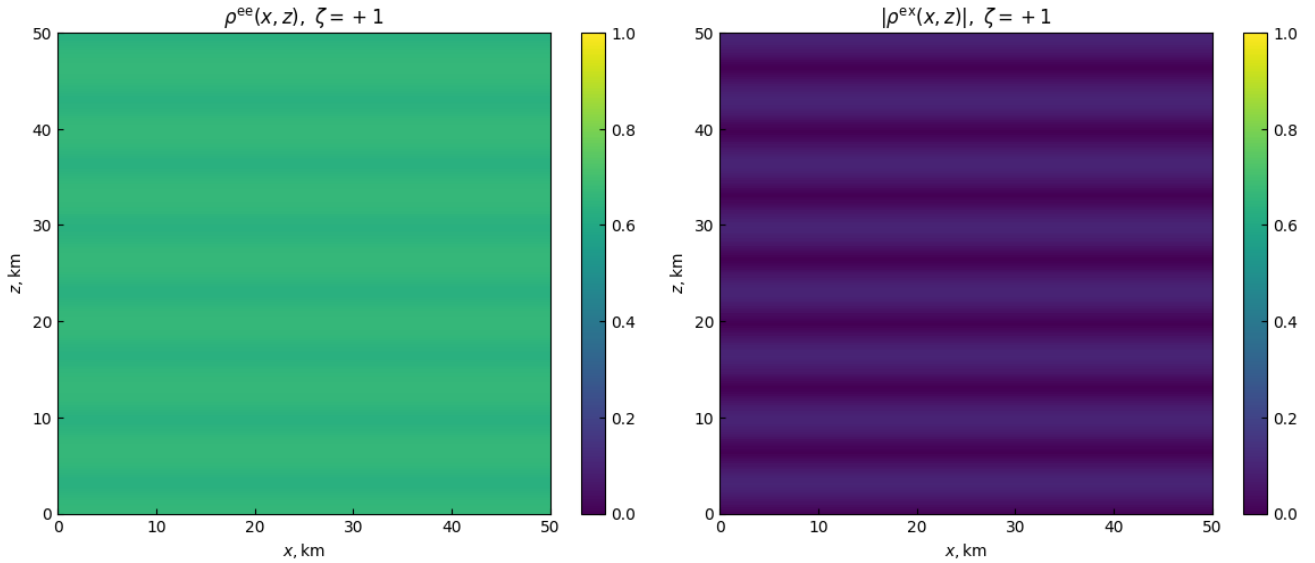


Рис. 4: Коллективные осцилляции в монохроматическом режиме, однородная светимость

Теперь же попробуем возбудить неустойчивости — введём периодическую по x неоднородность в светимости:

$$n_\nu(x) = n_{\nu 0} \left(1 + \epsilon \sin \left(\frac{2\pi K x}{L} \right) \right), \quad (16)$$

где, фактически, K отвечает за степень неоднородности, а ϵ отвечает за амплитуду неоднородности в светимости.

И действительно, в таком случае мы можем наблюдать красивые «турбулентности» элементов матрицы плотности:

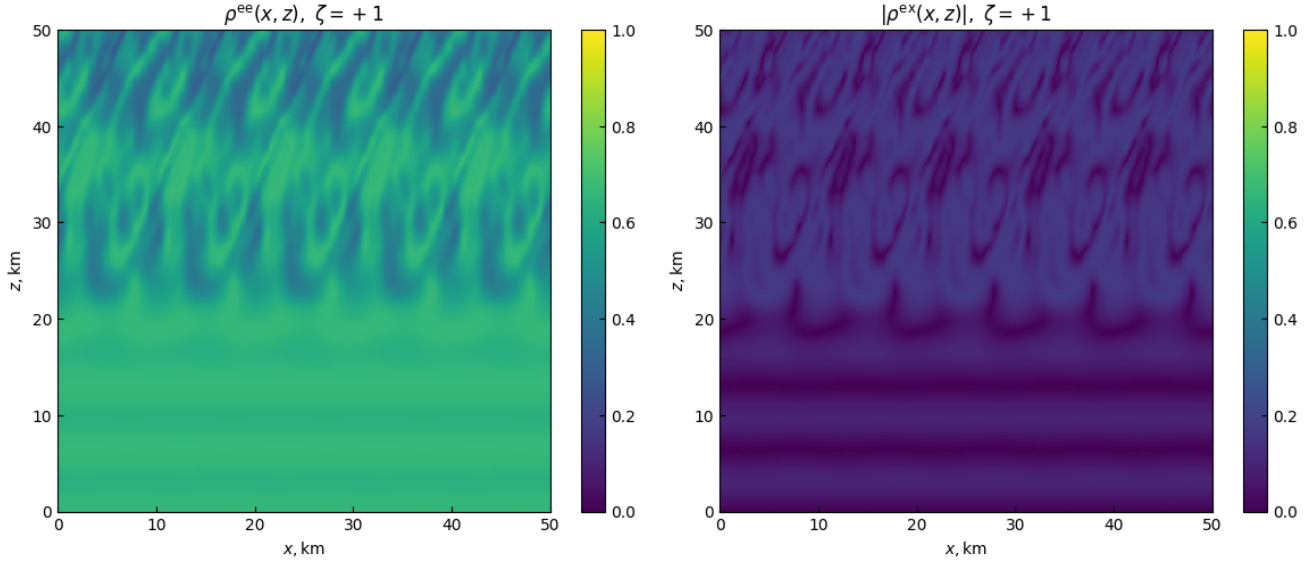


Рис. 5: Неустойчивости в монохроматическом режиме ($K = 5, \epsilon = 0.1$)

Занятно, что на графиках хорошо прослеживается угол лучей к нормали $\omega = 30^\circ$. Стоит отметить, что данные неустойчивости не являются неустойчивостями в привычном смысле (ляпуновские неустойчивости) – здесь мы незначительно смещаем не начальные условия, а фактически параметры, входящие в данное уравнение, — а именно функцию $n_\nu(x)$. На соответствующей невязке хорошо прослеживаются области развития неустойчивостей, например, экспоненциальный рост и нелинейный режим:

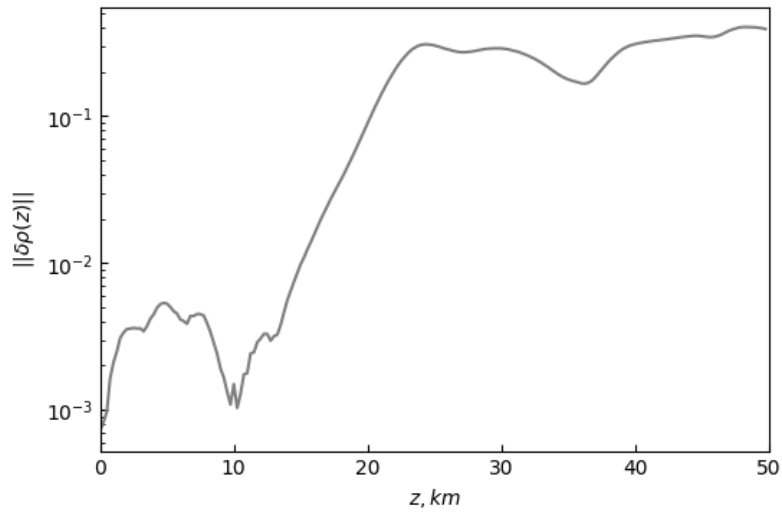


Рис. 6: Невязка решений ($K = 5, \epsilon = 0.1, \zeta = +1$)

где $\delta\rho(x, z) = \rho(x, z) - \rho_0(x, z)$, $\rho_0(x, z)$ — решение, соответствующее однородному случаю, а в качестве нормы матриц взята следующая норма:

$$\|\delta\rho(z)\|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \text{tr}(\delta\rho^\dagger(x, z)\delta\rho(x, z)) dx \quad (17)$$

4 Производительность

Как и ожидалось, код действительно оказывается очень производительным; доля параллельной части настолько высока, что ускорение остаётся достаточно линейным вплоть до $n \approx 20 - 30$ и, более того, хорошо подчиняется закону Амдала:

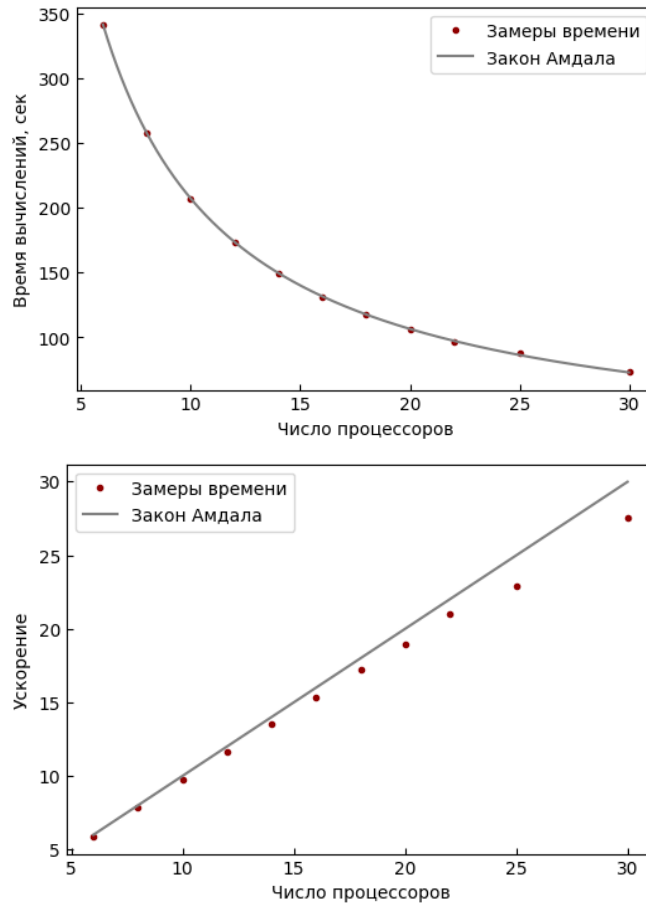


Рис. 7: Зависимость времени вычислений и ускорение

Закон Амдала также даёт следующие оценки на время последовательной и параллельной части

$$t_{\text{seq}} = 5.8 \text{ sec}, \quad t_{\text{par}} = 2013.8 \text{ sec},$$

таким образом, доля последовательной части составляет всего $\sim 0.3\%$, что и ожидалось при реализации данного параллельного кода.

5 Заключение

С помощью данного кода мы смогли отыскать нужные нам неустойчивости в уравнениях на эволюцию матрицы плотности нейтрино, возникающие при неоднородных светимостях сверхновой. Подчеркнём, что данные неустойчивости, как видно хотя бы из предложенных графиков, действительно играют ключевую роль в осцилляциях нейтрино, турбулентный режим является определяющим для их эволюции и ценность подобного анализа весьма существенна.

Написание достаточно сложного параллельного кода, по сравнению с обычным последовательным кодом, также оказалось обоснованным, и код оказывается существенно параллельным, доля его параллельной части почти на 3 порядка превосходит долю последовательной части, что даёт нам возможность использования большого числа используемых вычислительных узлов и существенного уменьшения времени работы.

Реализация данного кода даёт возможности для дальнейшего анализа данных осцилляций. Полученные результаты также согласуются с анализом, представленным 19 апреля 2019 года в статье [2]. На данный момент с помощью данного кода готовятся новые материалы для публикации.

Список литературы

- [1] Huaiyu Duan, Shashank Shalgar, Flavor instabilities in the neutrino line model, Phys. Lett. B **747** 139 (2015)
- [2] Joshua D. Martin, Sajad Abbar, Huaiyu Duan, Nonlinear flavor development of a two-dimensional neutrino gas, e-Print arXiv:1904.08877v1 (2019)
- [3] Huaiyu Duan, George M. Fuller, and Yong-Zhong Qian, Collective Neutrino Oscillations, Annual Review of Nuclear and Particle Science, Vol. 60:569-594 (2010)
- [4] M. T. Keil, G. G. Raffelt, and H.-T. Janka, Astrophys.J. 590, 971 (2003)